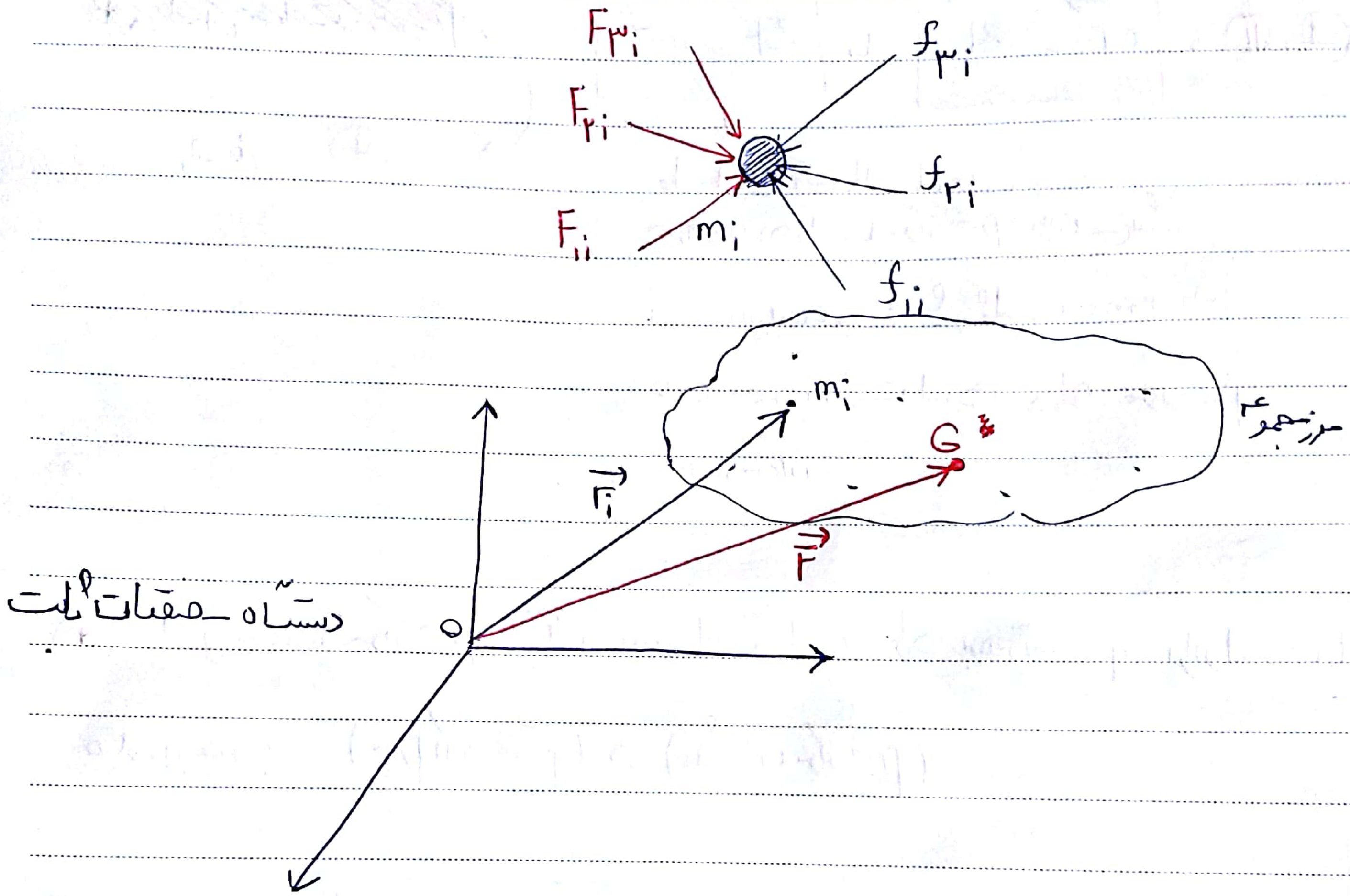
Subject:
Date:

فصل ۳_ سینتیک مجموعه ذرات :

F_{1i} ، F_{2i} ، ... : نیروهای خارجی وارد بر ذره

f_{1i} ، f_{2i} ، ... : نیروهای داخلی وارد بر ذره



$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{1i} + \vec{F}_{2i} + \dots + \vec{f}_{1i} + \vec{f}_{2i} + \dots$$

↓

مجموعه ذرات : $$\sum m_i\ddot{\vec{r}}_i = \sum \vec{F}_i + \sum \vec{f}_i$$

چون ذرات ۲ به ۲ به هم نیروی داخلی وارد می‌کنند که اثر
در کل در نظر گرفتن برآیند همدیگر را خنثی می‌کنند.

$\sum \vec{F}_i$ ← برآیند نیروهای خارجی وارد بر همه ذرات

$\sum \vec{f}_i$ ← برآیند نیروهای داخلی وارد بر همه ذرات

$$\boxed{\sum m_i\ddot{\vec{r}}_i = \sum \vec{F}} \qquad (I)$$

PaPCO

مرکز جرم : $M\vec{r} = \sum m_i \vec{r}_i$ → $\boxed{M\ddot{\vec{r}} = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i}$ (II)

(M ← جرم کل)

(I) و (II) : $\boxed{M\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F}}$ یا $\boxed{\sum \vec{F} = M\vec{a}}$

(*) رابطه

رابطه ای آنی یا لحظه ای
چرا؟ چون در هر لحظه مرکز جرم عوض می شود
اگر جسم صلب بود همیشه ثابت می ماند ولی
چون مجموعه ذرات است همواره مرکز جرم
تغییر می کند.

(*) اصل حرکت مرکز جرم : برآیند نیروهای خارجی وارد بر هر سیستم، برابر است با
حاصل ضرب (جرم کل سیستم) در (شتاب مرکز جرم)

نکات:

درهر لحظه تغییر می‌کند.

- $\vec{a}$ شتاب یک نقطه ریاضی است که به صورت لحظه‌ای نماینده مرکز جرم n ذره می‌باشد.

- $\vec{a}$ برای مجموعه صلب لزوماً شتاب هیچ ذره خاصی نمی‌باشد.

- رابطه ⊛ یک رابطه‌ی لحظه‌ای می‌باشد.

- بردار $\vec{a}$ الزاماً در راستای $\Sigma\vec{F}$ می‌باشد ولی $\Sigma\vec{F}$ الزاماً از مرکز جرم G نمی‌گذرد.

فرم اسکالر:

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad \Sigma F_z = m\bar{a}_z$$

کار - انرژی:

برای هر ذره m_i: $\quad U_{1-2})_i = \Delta T_i$

کار کل نیروهای خارجی + کار کل نیروهای داخلی

$F_1, F_2, \ldots$ $\qquad f_1, f_2, \ldots$

سیستم را می‌بریم $\Rightarrow \Sigma U_{1\to2})_i = \Sigma \Delta T_i \Rightarrow U_{1\to2} = \Delta T = \Sigma \Delta T_i = \left(\Sigma \frac{1}{2} m_i v_{i2}^2\right) - \left(\Sigma \frac{1}{2} m_i v_{i1}^2\right)$

کار کل نیروهای خارجی وارد بر سیستم برابر است با تغییر انرژی جنبشی کل سیستم

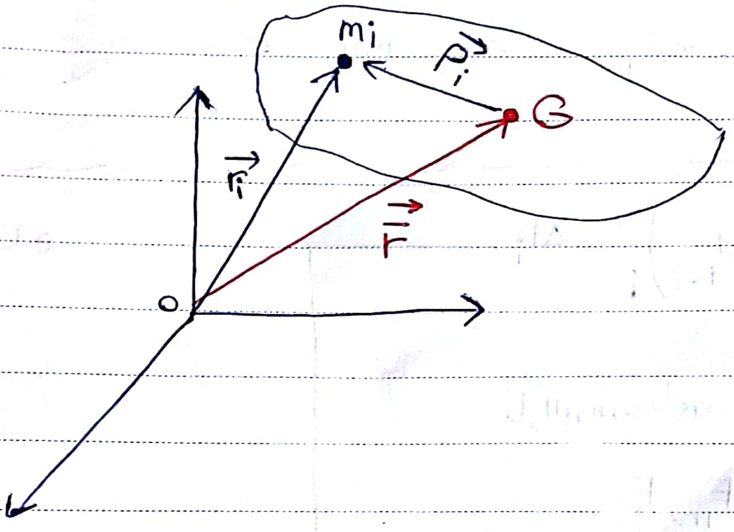
کار کل نیروهای خارجی وارد بر سیستم برابر است با تغییر انرژی جنبشی کل سیستم

$$U_{1\to 2} = U'_{1\to 2} - \Delta V_g - \Delta V_e \rightarrow \boxed{U'_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g}$$

ΔV_g: انرژی پتانسیل گرانشی کل ذرات

ΔV_e: انرژی الاستیک کل ذرات

روابط انرژی جنبشی :



$$\vec{V}_i = \dot{\vec{r}}_i$$
$$\vec{r}_i = \vec{r} + \vec{\rho}_i$$

$$\vec{V}_i = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\rho}}_i = \vec{V} + \dot{\vec{\rho}}_i \quad (*)$$

یادآوری: $T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$ ، $v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$ $\rightarrow T_i = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$

$$T = \sum T_i = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i) \cdot (\vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i)$$

استفاده از رابطه (*) موجود در صفحه قبل

$$= \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{\rho}}_i|^2 + \sum m_i \vec{\bar{v}} \cdot \dot{\vec{\rho}}_i$$

نکته: $\sum m_i \vec{\rho}_i = m \vec{\rho}_G = 0 \xrightarrow{\text{مشتق}} \sum m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0$

بردار موقعیت هر ذره نسبت به نقطه G (یعنی مرکز جرم) چرا

چون در ~~...~~ $\vec{\rho}_i$ ضرب شده در شروع می نویسیم $\sum m_i \vec{r}_i$ که حول o بود.

و داشتیم $\sum m_i \vec{r}_i = m \vec{r}$ پس این جا هم داریم $\sum m_i \vec{\rho}_i = m \vec{\rho}_G = 0$

حال چرا برابر صفر است چون دستگاه رو خود مرکز جرم قرار داره و فاصله ای وجود نداره پس برابر صفر می شود.

$$\sum m_i \vec{\bar{v}} \cdot \dot{\vec{\rho}}_i = \sum \vec{\bar{v}} \cdot m_i \dot{\vec{\rho}}_i = \vec{\bar{v}} \cdot \sum m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0$$

اسکالر — طبق آخرین نتیجه در همین صفحه در چند خط بالاتر $= 0$

PaPCO

پس رابطه ی ما ساده تر می شود که ادامه در ~~...~~ صفحه بعد

Subject:
Date

بازنویسی انرژی جنبشی

$$T = \frac{1}{2} m \bar{V}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{\rho}}_i|^2$$

انتقالی مرکز جرم — ذرات نسبت به مرکز جرم

انرژی جنبشی کل سیستم = انرژی حرکت انتقالی مرکز جرم + انرژی ناشی از حرکت ذرات نسبت به مرکز جرم

مومنتم - مومنتم

مومنتم خطی :

$$\vec{G}_i = m_i \vec{V}_i \rightarrow \vec{G} = \sum \vec{G}_i = \sum m_i \vec{V}_i$$

$$\vec{V}_i = \dot{\vec{r}}_i = \vec{\bar{V}} + \dot{\vec{\rho}}_i \rightarrow \vec{G} = \sum m_i (\vec{\bar{V}} + \dot{\vec{\rho}}_i)$$

$$= \sum m_i \vec{\bar{V}} + \sum m_i \dot{\vec{\rho}}_i \Rightarrow \boxed{\vec{G} = m \vec{\bar{V}}}$$

طبق قبلی

مومنتم خطی هر سیستم = حاصل ضرب جرم سیستم در سرعت مرکز جرم

Subject:
Date

$\vec{G} = m\vec{\dot{V}}$

از طرفی $\sum\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{\ddot{V}}$

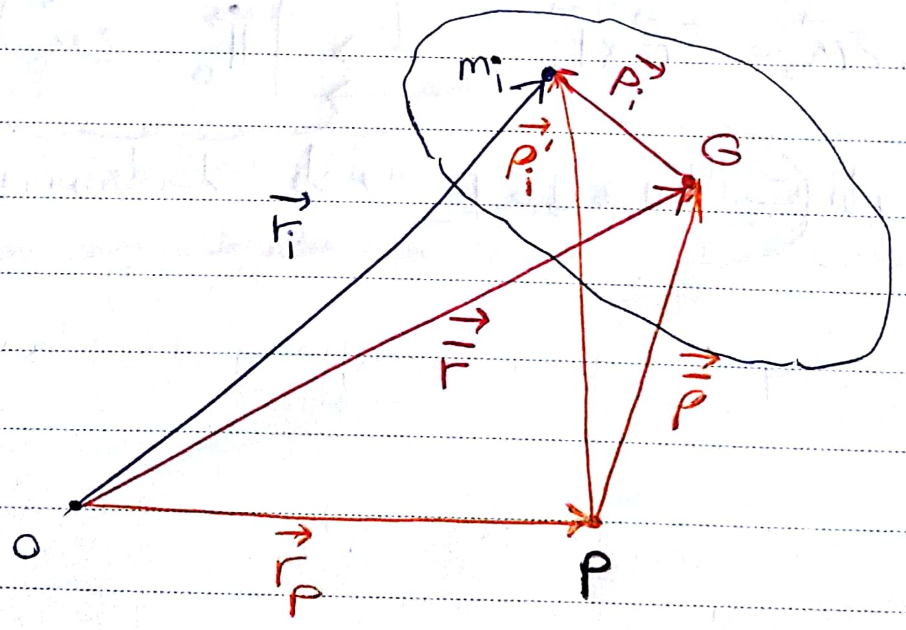
$\rightarrow \boxed{\vec{\dot{G}} = \sum\vec{F}}$

برآیند نیروهای خارجی بر سیستم = میزان تغییرات مومنتم خطی نسبت به زمان

باز هم تأکید می شود که $\sum F$ (مجموع نیروهای خارجی) الزاماً از مرکز جرم نمی گذرد.

مومنتم زاویه ای

حول ۳ نقطه ممکن است ما درگیر داشته باشیم طبق تعریف مومنتم زاویه ای → نقطه ثابت O / مرکز جرم G / نقطه دلخواه P (می تواند دارای شتاب $a_p = \ddot{r}_p$ باشد)



Subject:
Date

حول نقطه ثابت o :

$$\vec{H}_o = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\dot{\vec{H}}_o = \sum \dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i$$

دوم نیوتن برای ذره

$\dot{\vec{r}}_i \rightarrow \vec{v}_i$

صفر چون ضرب خارجی v_i در خودش

$$= \sum \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \vec{f}_i) = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

برای ذره فرقی می‌کند هم داخلی هم خارجی

صفر

نیروهای داخلی ۲به۲ گشتاورشان حول نقطه‌ها صفر می‌شود.

از طرفی $\rightarrow \sum \vec{M}_o = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

$$\dot{\vec{H}}_o = \sum \vec{M}_o$$

مجموع گشتاور کل نیروهای خارجی وارد بر سیستم حول هر نقطه ثابت برابر

میزان تغییر مومنتم زاویه‌ای مجموعه حول آن نقطه

Subject:
Date:

حول مرکز جرم G :

مومنتم زاویه‌ای مطلق :

$$\vec{H}_G = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i$$

مومنتم خطی نسبت به O

چون حول G گرفتیم بازوی گشتاور عوض شد.

مکان‌ها اسپم رطبق شکل هم مشخص است

$$\vec{r}_i = \vec{\bar{r}} + \vec{\rho}_i \rightarrow \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{\bar{r}}} + \dot{\vec{\rho}}_i$$

جاگذاری

$$\vec{H}_G = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \left(\dot{\vec{\bar{r}}} + \dot{\vec{\rho}}_i\right) = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\bar{r}}} + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i$$

$$= \sum m_i \rho_i \times \dot{\vec{\bar{r}}} + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i \rightarrow \left(\sum m_i \vec{\rho}_i\right) \dot{\vec{\bar{r}}} + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i$$

چون اسکالره

چون ربطی به i نداره
میشه از Σ آورد بیرون

$\sum m_i \vec{\rho}_i$: 0

$$\boxed{\vec{H}_G = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i} \rightarrow$$ مومنتم زاویه‌ای نسبی

مومنتم خطی نسبت به G

درنهایت نتیجه می‌گیریم مومنتم زاویه‌ای مطلق و نسبی یکسان خواهد بود

PaPCO

Subject:
Date

جلسه چهارم

نیوتن

$$\sum F = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i = m\ddot{\vec{r}}$$

کار و انرژی

$$U'_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{\rho}}_i|^2$$

$$\sum m_i \rho_i = m \bar{\rho}_c = 0$$

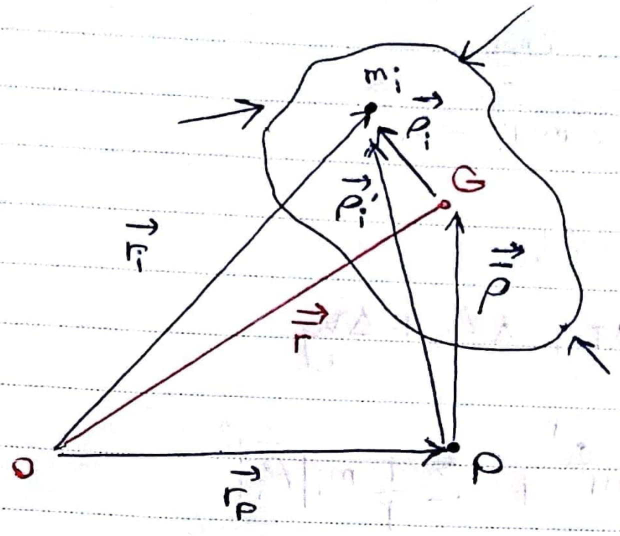
ضربه و مومنتم

مومنتم خطی
$$\vec{G} = m\dot{\vec{\bar{v}}}$$

مومنتوم زاویه‌ای
$$\dot{\vec{G}} = \sum \vec{F}$$

حول → ثابت / مرکز جرم (G)

دلخواه (P)



$$\vec{H}_O = \sum \vec{r}_i \times m\dot{\vec{r}}_i$$

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum M_O$$

$$\vec{H}_G = \sum \vec{\rho}_i \times m\dot{\vec{r}}_i$$ مطلق

↕ (=) → اثبات کردیم

$$\vec{H}_G = \sum \vec{\rho}_i \times m\dot{\vec{\rho}}_i$$ نسبی

در این صفحه از این جا به بعد یه سری روابط که در صفحات بعد اثبات می کنیم

این جا می نویسیم :

$$\dot{H}_G = \sum M_G$$

$$\vec{H}_P = \sum \vec{\rho}_i' \times m_i\dot{\vec{r}}_i$$

$$\vec{H}_P = \vec{H}_G + \bar{\vec{\rho}} \times m\bar{\vec{v}}$$

$$\sum \vec{M}_P = \dot{\vec{H}}_G + \bar{\vec{\rho}} \times m\bar{\vec{a}}$$

$$\vec{H}_P)_{rel} = \vec{H}_G + \bar{\vec{\rho}} \times m\bar{\vec{v}}_{rel}$$

$$\sum \vec{M}_P = \dot{\vec{H}}_P)_{rel} + \bar{\vec{\rho}} \times m\vec{a}_P$$

PAPCO

$$\vec{\dot{H}}_G = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i + \sum \vec{\dot{\rho}}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i$$ یادآوری: $\vec{r}_i = \vec{\bar{r}} + \vec{\rho}_i$

$$= \sum \vec{\rho}_i \times m_i \left(\ddot{\vec{\bar{r}}} + \ddot{\vec{\rho}}_i\right) + \sum \vec{\dot{\rho}}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

$$= \sum \left(\vec{\rho}_i \times m_i \ddot{\vec{\bar{r}}}\right) + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \ddot{\vec{\rho}}_i + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum \vec{\rho}_i \times (\vec{F}_i + \vec{f}_i)$$

$$\left(\sum m_i \vec{\rho}_i\right) \times \ddot{\vec{\bar{r}}}$$ ← صفر به فرض مرکز است.

ضرب خارجی در این عبارت ← ۰

$$= \sum \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i$$

از طرفی $\sum \vec{M}_G = \sum \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i \Rightarrow$ $\boxed{\vec{\dot{H}}_G = \sum \vec{M}_G}$

حول نقطه دلخواه P:

$$\vec{H}_P = \sum \vec{\rho}_i' \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum \left(\vec{\bar{\rho}} + \vec{\rho}_i\right) \times m_i \dot{\vec{r}}_i =$$

$$= \sum \vec{\bar{\rho}} \times m_i \dot{\vec{r}}_i + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{\bar{\rho}} \times \sum m_i \dot{\vec{r}}_i + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$\sum m_i \dot{\vec{r}}_i$ ← $m\dot{\vec{\bar{r}}}$ ، $\sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i$ ← $\vec{H}_G$

$$\sum m_i \vec{r}_i = m\vec{\bar{r}}$$
$$\sum m_i \dot{\vec{r}}_i = m\dot{\vec{\bar{r}}}$$

چرا؟ ←

دقت صفر نمی‌شدها چرا چون $m_i \dot{\vec{r}}_i$ را نمی‌شد جدا کرد چون $\vec{\rho}_i$ خودش هم برحسب i است.

درنهایت ⟵ $\boxed{\vec{H}_P = \vec{H}_G + \vec{\bar{\rho}} \times m\vec{\bar{v}}}$

از طرفی : $\sum \vec{M}_P = \sum \vec{M}_G + \vec{\rho} \times \sum \vec{F}$

ببین مثل همان چیزی که در استاتیک داشتیم اون نیروهای بیرون را بخواهیم به G منتقل کنیم همون نیروها را منتقل کرده و یه گشتاوری هم می‌گذاریم حال اگر حول P بخواهیم خود اون نیروها هم حول P یه گشتاور ایجاد می‌کنند.

از طرفی :
$$\begin{cases} \sum \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G \\ \sum \vec{F} = m\vec{a} \end{cases}$$

در نهایت

$$\boxed{\sum \vec{M}_P = \dot{\vec{H}}_G + \vec{\rho} \times m\vec{a}}$$

Date

مومنتوم زاویه ای نسبی حول P :

$$\vec{H}_P)_{rel} = \sum \underbrace{\vec{\rho}_i'}_{*} \times m_i \underbrace{\dot{\vec{\rho}}_i'}_{**}$$

یادآوری : $\underbrace{\vec{\rho}_i' = \vec{\bar{\rho}} + \vec{\rho}_i}_{(*)} \Rightarrow \underbrace{\dot{\vec{\rho}}_i' = \dot{\vec{\bar{\rho}}} + \dot{\vec{\rho}}_i}_{**}$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum \vec{\bar{\rho}} \times m_i \dot{\vec{\bar{\rho}}}}_{\vec{\bar{\rho}} \times m \vec{\bar{v}}_{rel}} + \underbrace{\sum \vec{\bar{\rho}} \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i}_{\vec{\bar{\rho}} \times \underbrace{\sum m_i \dot{\vec{\rho}}_i}_{\text{صفر}}} + \underbrace{\sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\bar{\rho}}}}_{\underbrace{(\sum m_i \vec{\rho}_i)}_{\text{صفر}} \times \dot{\vec{\bar{\rho}}}} + \underbrace{\sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i}_{\vec{H}_G)_{rel}}$$

(نسبی ←)

$$\vec{H}_P)_{rel} = H_G)_{rel} + \vec{\bar{\rho}} \times m \vec{\bar{v}}_{rel} = \vec{H}_G + \vec{\bar{\rho}} \times m \vec{\bar{v}}_{rel}$$

$\vec{H}_G)_{rel} = \vec{H}_G$

$$\dot{H}_P)_{rel} = \underbrace{\sum \dot{\vec{\rho}}_i' \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i'}_{0} + \sum \vec{\rho}_i' \times m_i \ddot{\vec{\rho}}_i' \quad (*)$$

از طرفی $\vec{r}_i = \vec{r}_P + \vec{\rho}_i' \rightarrow \ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{r}}_P + \ddot{\vec{\rho}}_i' \quad (*)$

$$= \underbrace{\sum \vec{\rho}_i' \times m_i \underbrace{\ddot{\vec{r}}_i}_{(F_i + f_i)}}_{\sum M_P} - \underbrace{\sum \vec{\rho}_i' \times m_i \ddot{\vec{r}}_P}_{\underbrace{(\sum m_i \vec{\rho}_i')}_{m\vec{\bar{\rho}}} \times \underbrace{\ddot{\vec{r}}_P}_{\vec{a}_P}}$$

ادامه در صفحه بعد

PAPCO

Subject:
Date

$$\dot{H}_P)_{rel} = \sum M_P - \vec{\rho} \times m\vec{a}_P \Rightarrow \boxed{\sum M_P = \dot{H}_P)_{rel} + \vec{\rho} \times m\vec{a}_P}$$

نکته مهم

$\sum M_P = \dot{H}_P)_{rel}$ اگر

$\vec{a}_P = 0$ ← یعنی اینرسی نقطه P همان ماست.

$\vec{\rho} = 0$ ← نقطه P همان G است.

$\vec{\rho}$ و $\vec{a}_P$ موازی باشند ← (a_P از G بگذرد)

PAPCO

بقای انرژی و مومنتم :

بقای انرژی :

if $U'_{1\to 2}=0 \rightarrow \Delta T+\Delta V_e+\Delta V_g=0 \rightarrow T_1+V_{e_1}+V_{g_1}=T_2+V_{e_2}+V_{g_2}$

کار نیروی خارجی صفر

بقای مومنتم :

if $\int_{t_1}^{t_2}\sum\vec{F}\,dt=0$ بقای مومنتم خطی

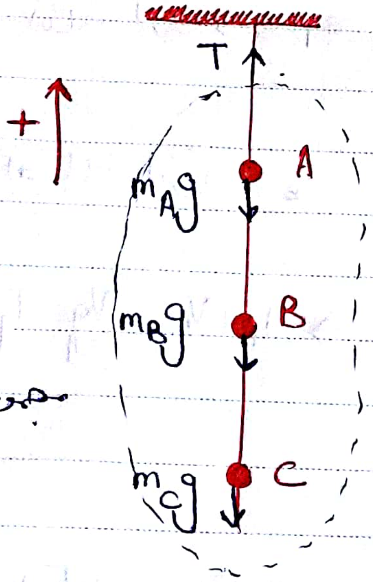
if $\int_{t_1}^{t_2}\sum\vec{M}_O\,dt=0 \rightarrow \vec{H}_{O_1}=\vec{H}_{O_2}$

بقای مومنتم زاویه‌ای

if $\int_{t_1}^{t_2}\sum\vec{M}_G\,dt=0 \rightarrow \vec{H}_{G_1}=\vec{H}_{G_2}$

مثال) ۳ جرم در حال جابجایی روی طنابی می‌باشند

نیروی کشش طناب؟



$m_A = 10\,kg \qquad a_A = -1.6\ m/s^2$

$m_B = 12\,kg \qquad a_B = 0.6\ m/s = cte$

$m_C = 8\,kg \qquad a_C = 0.9\ m/s^2$

حل) اول مجموعه رو مشخص کنید

نیروها را مشخص کن

چون شتاب‌ها با داده معلومه روش حل باید نیوتن باشد.

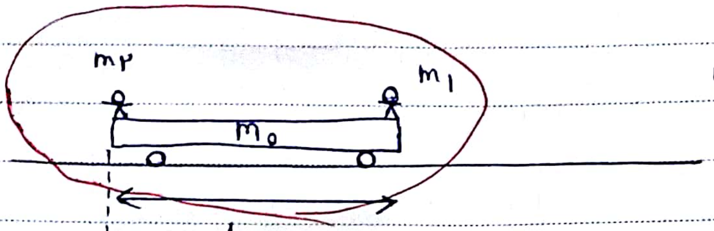
$$\Sigma F = \Sigma m_i a_i = m\bar{a}$$

$$T - m_A g - m_B g - m_C g = m_A a_A + m_B a_B + m_C a_C$$

$$T - (10+12+8)\,9.8 = (10\times -1.6) + (0) + (8\times 0.9)$$

$$\boxed{T = 285.2\ N}$$

کشش طناب بین B و A رو هم می‌شه حساب کرد باید مجموعه رو یه طور دیگر بگیری.

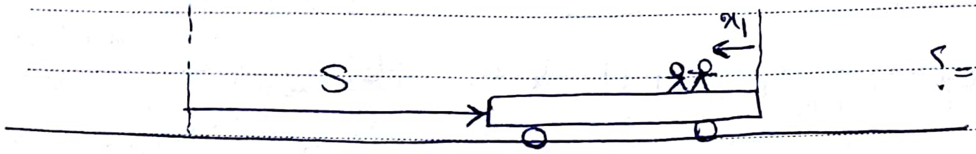


مثال ۱) ارابه در حالت اولیه ساکن است

اصطکاک ناچیز است

رابطه جابجایی ارابه S و

جابجایی جرم m_1 (x_1) = ?



$S = f(x_1) = ?$

حل)

$\sum F = 0 \rightarrow m\bar{V}_1 = m\bar{V}_2 \rightarrow \boxed{\bar{V}_2 = 0}$ ($\bar V_1$: ساکن)

طبق سیستم

از کار و انرژی هم می‌شود به این رسید.

بنابراین موقعیت جرم در موقعیت اول برابر موقعیت مرکز جرم در موقعیت دوم

$\bar{x}_{G_1} = \bar{x}_{G_2} \rightarrow \bar{V}_2 = 0$ چرا؟ چون بدست آوردیم

که این لزوماً برای آخرش نیست و در هر لحظه‌ای برقراره پس مرکز جرم جابجا نمی‌شود.

$$\bar{x}_{G_1} = \frac{m_2(L) + m_0\left(\frac{L}{2}\right) + m_1(L)}{m_2 + m_0 + m_1}$$

$$\bar{x}_{G_2} = \frac{(m_1+m_2)(S+L-x_1) + m_0\left(S+\frac{L}{2}\right)}{m_1 + m_2 + m_0}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_{G_1} = \bar{x}_{G_2} \Rightarrow S = \frac{(m_1+m_2)\,x_1 - m_2 L}{m_0 + m_1 + m_2}$$

فصل پنجم : سینماتیک اجسام صلب در صفحه :

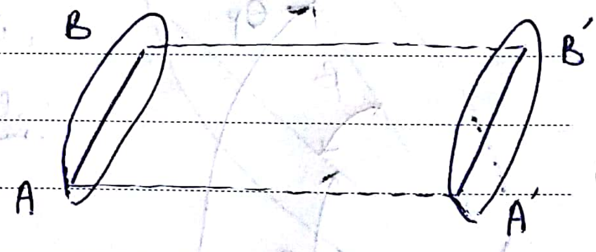
سینماتیک اجسام صلب ← حرکت خطی / حرکت زاویه‌ای

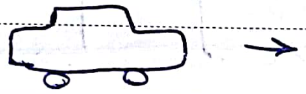
جسم صلب : جسمی که در آن فاصله ذرات تغییر نمی‌کند.

- هر مسئله ای تحت اثر نیرو تغییر شکل می‌دهد اگر تغییر شکل های ماده در مقیاس حرکت کلی کوچک باشد ← تقریب جسم صلب

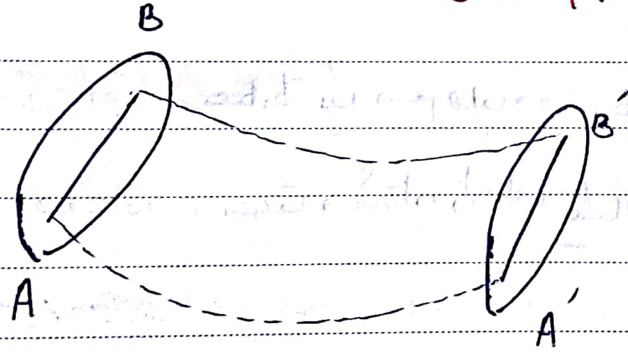
انواع حرکت در صفحه :

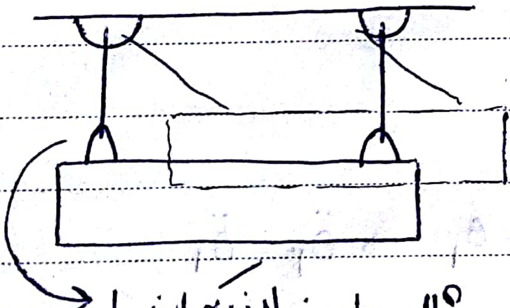
الف) انتقال مستقیم الخط





ب) انتقال منحنی الخط



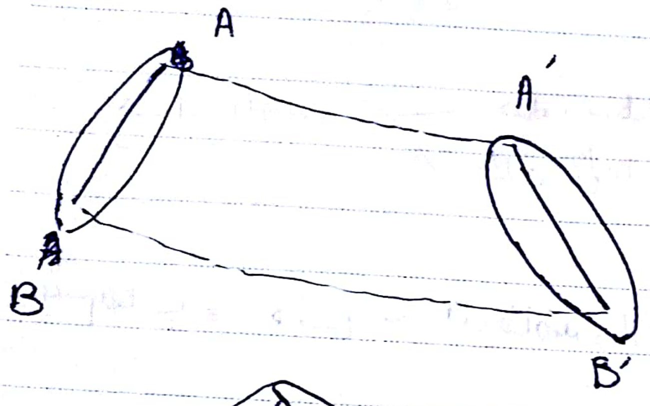


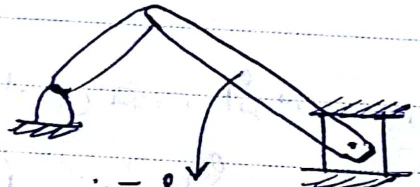
مثال برای زمانی که اینها چرخش نداشته باشند
اگر چرخش باشد می‌شد دوران
کتاب صفحه ج.

نکته : در حالت الف و ب حرکت جسم صلب را می‌توان با حرکت ذره مدل سازی نمود
گفتیم زمانی می‌توانیم این کار را بکنیم که دوران نداشته باشد.

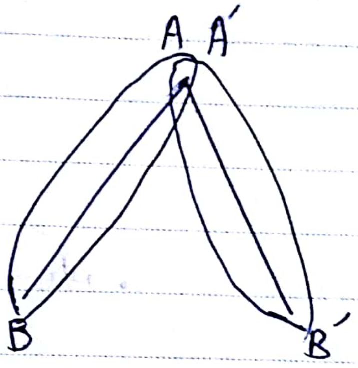
Subject:
Date

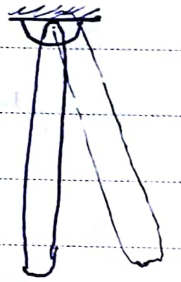
د) حرکت کلی در صفحه



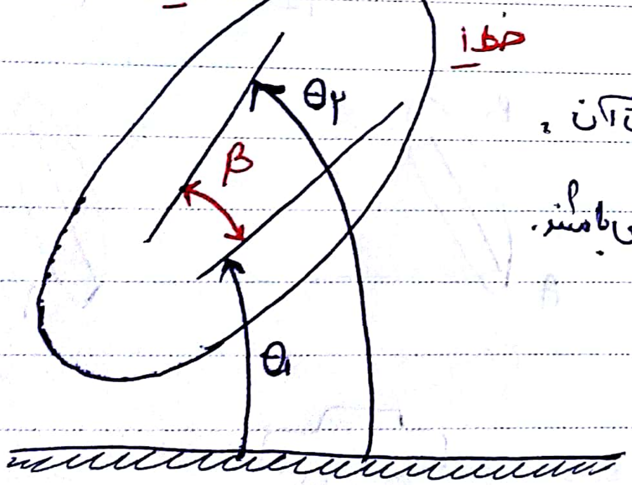


ج) دوران حول محور ثابت





دوران 8



نتیجه گیری 8 تمامی خطوط یک جسم صلب در صفحه حرکت آن، دارای جابجایی، سرعت و شتاب زاویه ای یکسان می باشند.

$$\theta_2 = \theta_1 + \beta \qquad \beta = Cte \rightarrow \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 \rightarrow \ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_1$$

PAPCO

روابط حرکت زاویه‌ای :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

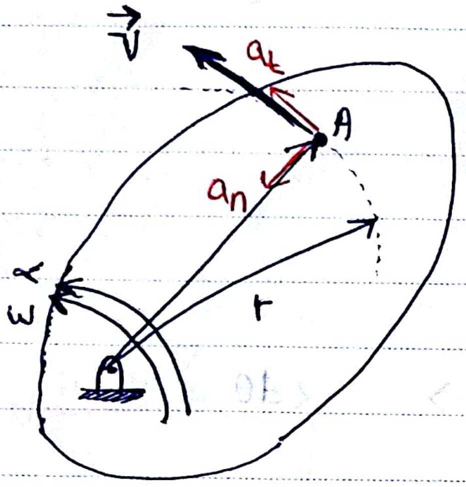
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\,\omega \Rightarrow \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

نکته : تمامی روابط حرکت مستقیم الخط ذره، برای دوران در صفحه قابل اعمال می‌باشد

$$S \rightarrow \theta$$
$$V \rightarrow \omega$$
$$a \rightarrow \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \\ \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \end{cases}$$

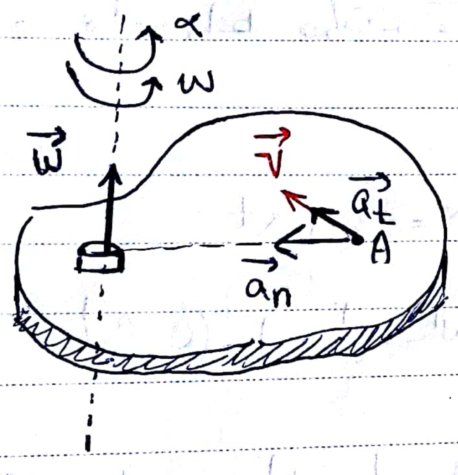
دوران حول یک محور ثابت :



$$v = r\omega$$

$$a_t = r\alpha$$

$$a_n = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} = v\omega$$



$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} =$$

$$\vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

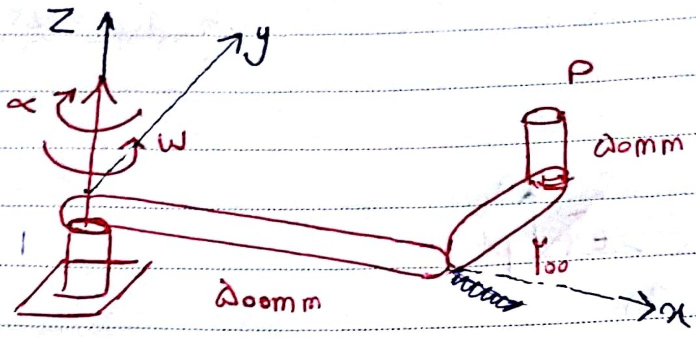
$$\vec{a_t} = \vec{\alpha}\times\vec{r}$$

$$\vec{a_n} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

* جهت ها طبق قاعده دست راست تعیین می‌شوند.

مثال)

$\vec{a}_p , \vec{v}_p = ?$ $\quad \omega = 2\,rad/s \quad \alpha = 3\,rad/s^2$



$$\begin{cases} \vec{\omega} = 2\vec{k} \\ \vec{\alpha} = -3\vec{k} \\ \vec{r} = 0.5\vec{i} + 0.2\vec{j} + 0.05\vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \underline{\qquad} = -0.4\vec{i} + \vec{j}$$

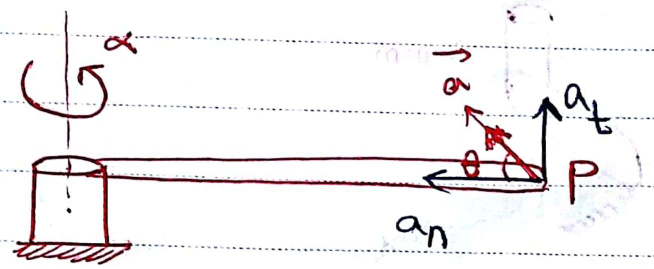
$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \underline{\qquad} = -2\vec{i} - 0.8\vec{j}$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \underline{\qquad} = 0.6\vec{i} - 1.5\vec{j}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = -1.4\vec{i} - 2.3\vec{j}$$

نکته) مولفه های موقعیت که در راستای محور دوران باشند (به دلیل ضرب خارجی)
هیچ مولفه سرعت یا شتابی ایجاد نخواهند کرد.

مثال) میله ای در صفحه با شتاب ثابت دوران می کند. در مدت ۲ ثانیه، سرعت از صفر به ۶۰۰rpm می رسد. پس از چه مدتی شتاب P میله با امتداد میله زاویه ۴۵ می سازد؟



$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{600 \times \frac{2\pi}{60} - 0}{2} = 10\pi$$

$$t = ? \rightarrow \theta = 45^\circ \rightarrow \tan\theta = 1 = \frac{a_t}{a_n} \rightarrow a_t = a_n \rightarrow$$

$$\rightarrow r\alpha = r\omega^2 \rightarrow \alpha = \omega^2 \ (t=?)$$

$$\omega(t=?) = \alpha t + \omega_0 \rightarrow t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 0.178\,s$$

Subject:
Date

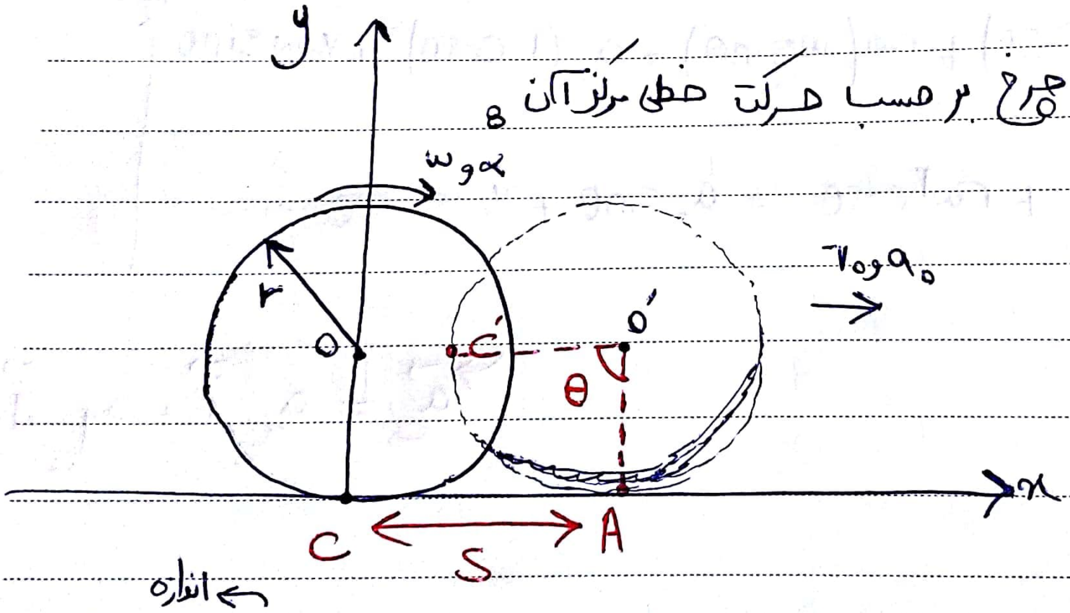
حرکت مطلق اجسام صلب:

- روابط هندسی برای $\vec{r}$ (بردار موقعیت) نوشته شود و از آن مشتق می‌گیریم تا سرعت و شتاب بدست آید.
- اگر روابط هندسی ساده باشند، بررسی به صورت مطلق ساده و کارایی باشد.
- " " " پیچیده " ، حرکت " " " " نسبی خواهد بود.

قرارداد: جهت θ برای اجسام صلب در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، مثبت فرض می‌گردد.

مثال) غلتش بدون لغزش:

بررسی حرکت زاویه‌ای چرخ بر حسب حرکت خطی مرکز آن:



اندازه ←

$CA = S = \overset{\frown}{AC'} = r\theta$

$S = r\theta$

$\dot{S} = r\dot{\theta} = r\omega = v_0$

$\ddot{S} = r\ddot{\theta} = r\alpha = a_0$

PAPCO

حال شتاب نقطه را درنظر می‌گیریم :

$$\begin{cases} x_{c'} = S - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta) \\ y_{c'} = r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta) \end{cases}$$

$$v_{x_{c'}} = r(\omega - \omega\cos\theta) = r\omega(1-\cos\theta) = v_0(1-\cos\theta)$$

$$v_{y_{c'}} = r(0 + \omega\sin\theta) = r\omega\sin\theta = v_0\sin\theta$$

$$\vec{v}_{c'} = v_{x_{c'}}\vec{i} + v_{y_{c'}}\vec{j}$$

$$a_{x_{c'}} = r\alpha(1-\cos\theta) + r\omega(\omega\sin\theta) = a_0(1-\cos\theta) + v_0\omega\sin\theta$$

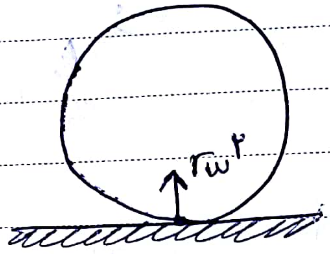
$$a_{y_{c'}} = r\alpha\sin\theta + r\omega^2\cos\theta = a_0\sin\theta + v_0\omega\cos\theta$$

$$\vec{a}_{c'} = a_{x_{c'}}\vec{i} + a_{y_{c'}}\vec{j}$$

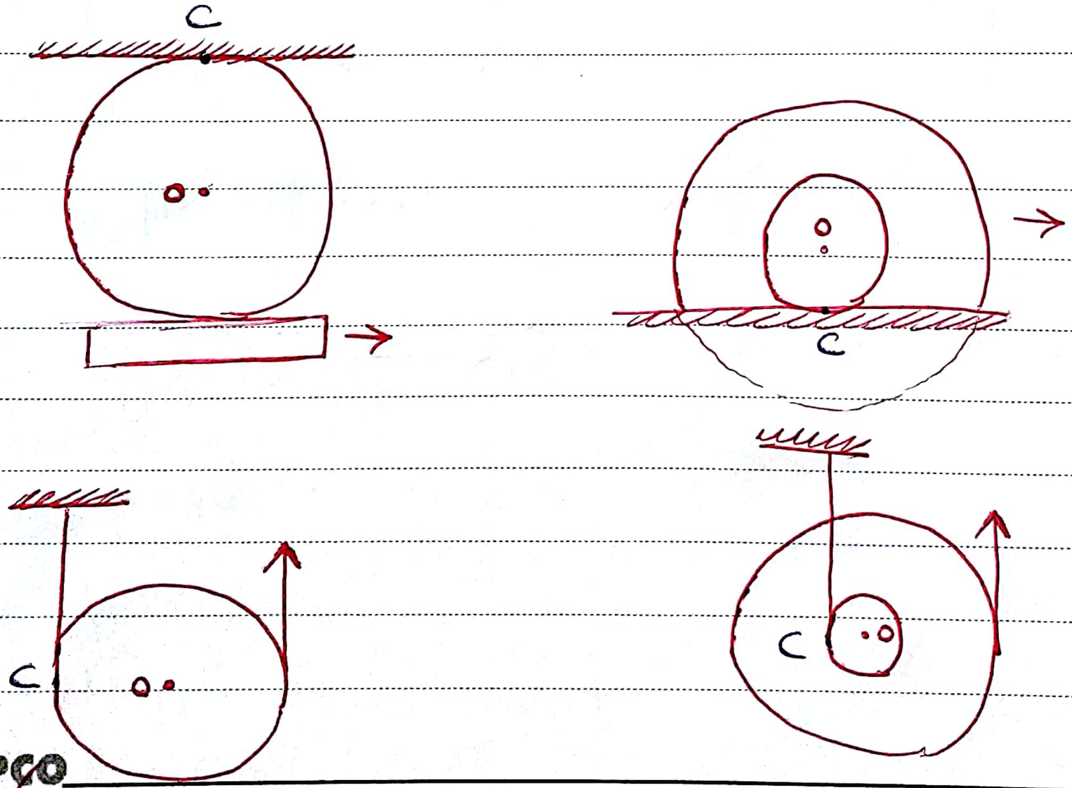
Subject:
Date

نکته: سینتیک نقطه تماس؟

$\theta = 0 \rightarrow \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = v_0 \omega \end{cases}$

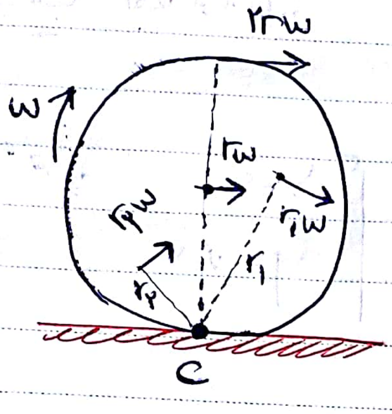


نکته: حالت‌های مختلف این مسئله:



مرکز آنی دوران

نقطه c مانند مرکز دوران عمل می‌نماید فقط چون در لحظات مختلف متفاوت است نامیده می‌شود.



یکی از ویژگی های مرکز آنی دوران

سرعت هر نقطه می‌شود
فاصله‌اش از مرکز آنی
دوران در امگا

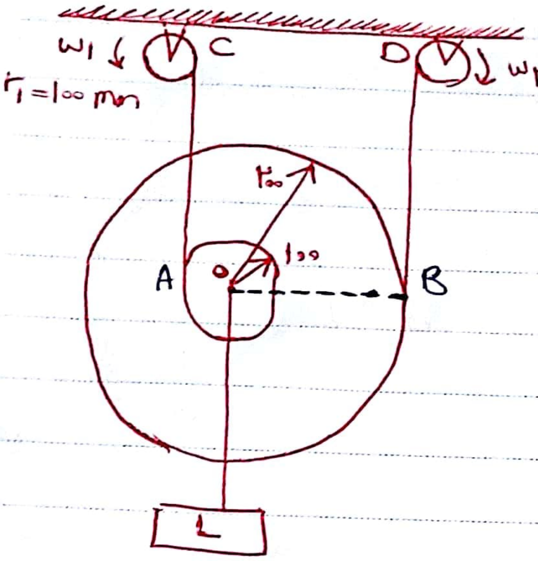
PAPCO

Subject:
Date

درگوشی یادآوری

دوران

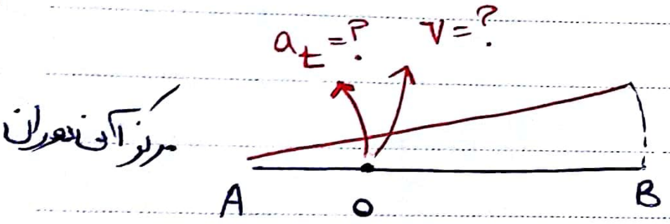
مثال



- شتاب و سرعت بالا رفتن بار L ؟
- شتاب و سرعت زاویه‌ای قرقره ؟

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\omega}_1 = 0 \\ \omega_2 = 2\ rad/s \\ \dot{\omega}_2 = -3\ rad/s^2 \end{cases}$$

حل: مرکز آنی دوران A است.



⊛ نقاط مماس بر روی قرقره ها دارای سرعت و شتاب مماسی برابر خواهند بود.

$$\begin{cases} v_D = r_2 \omega_2 = 0.1 \times 2 = 0.2\ m/s \\ a_D)_t = r_2 \alpha_2 = 0.1 \times -3 = 0.3\ m/s^2 \end{cases}$$

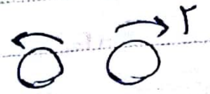
درجهت پاد ساعتگرد طبق علامت نمی‌زنیم چون هندسی در نظر گرفته بودیم و واسه هر ۲ $r\omega$ گرفتیم.

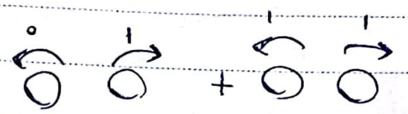
باید
$$\begin{cases} v_B = v_D \\ a_B)_t = a_D)_t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \overline{AB}\ \omega = 0.2 \rightarrow \omega = \frac{2}{3}\ rad/s \ \circlearrowright \\ \overline{AB}\ \alpha = -0.3 \rightarrow \alpha = -1\ rad/s^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_L = v_O = \overline{AO}\ \omega = 0.067\ m/s \ \checkmark \\ a_L = a_O)_t = \overline{AO}\ \alpha = -0.1\ m/s^2 \ \checkmark \end{cases}$$

P4PCO

اگر در سوال قبل w_1 داشتیم می‌شد گفت که نسبی حرکت می‌کنند یعنی مثلاً

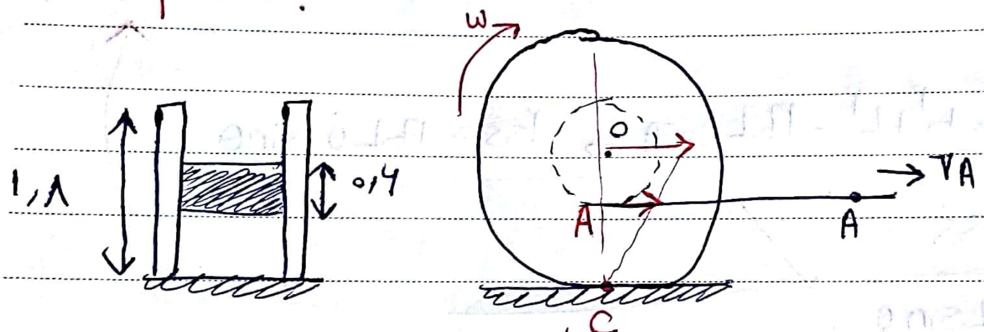
اگر A و B  باشد می‌شد گفت راستی با سرعت ۱ نسبت به هم حرکت می‌کنند. ولی خودشون هم می‌چرخند یعنی مثلاً



مثال) قرقره کابل برق بدون لغزش بر سطح افقی می‌غلتد.

- اگر در نقطه A کابل دارای سرعت $v_A = 0.8\,m/s$ باشد.

$v_O = ?$
$w = ?$



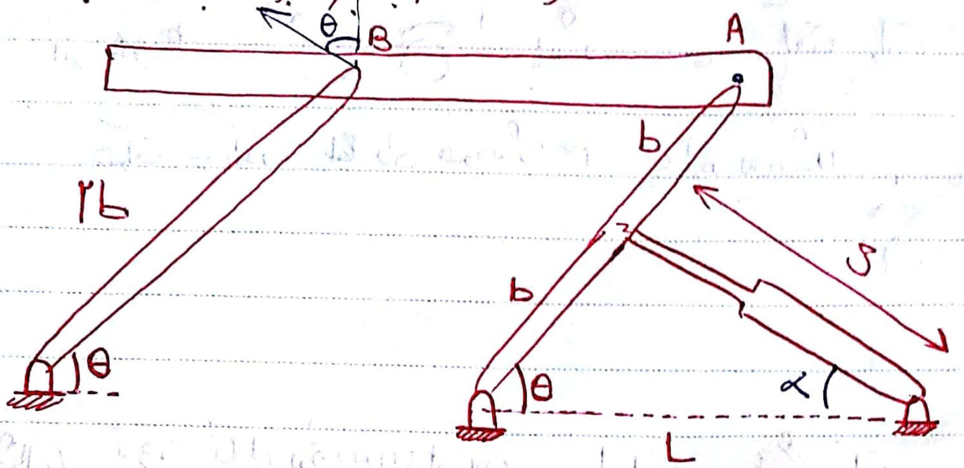
$v_A = \overline{AC}\,w \rightarrow 0.48 = 0.6 \times w \rightarrow w = 1.33\ rad/s$

$v_O = \overline{CO}\,w \rightarrow v_O = 0.9 \times (1.33) = 1.2\ m/s$

جهت w ساعتگرد می‌شد که برخلاف چیزی است که ما فرض کردیم.

Subject :
Date

مثال) میله با سرعت ثابت $\dot{s}$ حرکت می‌کند. سرعت قائم بالابر برحسب θ ؟



$\dot{\theta} = \omega \qquad v_B = 2b\omega \rightarrow$ سرعت قائم $= v_B \cos\theta = 2b\omega \cos\theta$

قانون کسینوس‌ها $\quad s^2 = b^2 + L^2 - 2bL\cos\theta \Rightarrow 2s\dot{s} = 2bL\dot{\theta}\sin\theta$

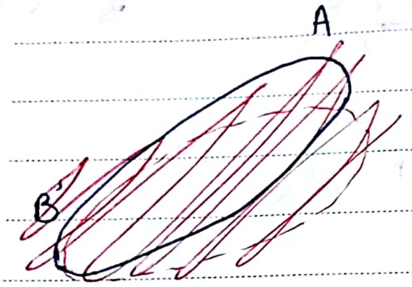
$$\rightarrow \dot{\theta} = \frac{s\dot{s}}{bL\sin\theta}$$

PAPCO

Subject:
Date

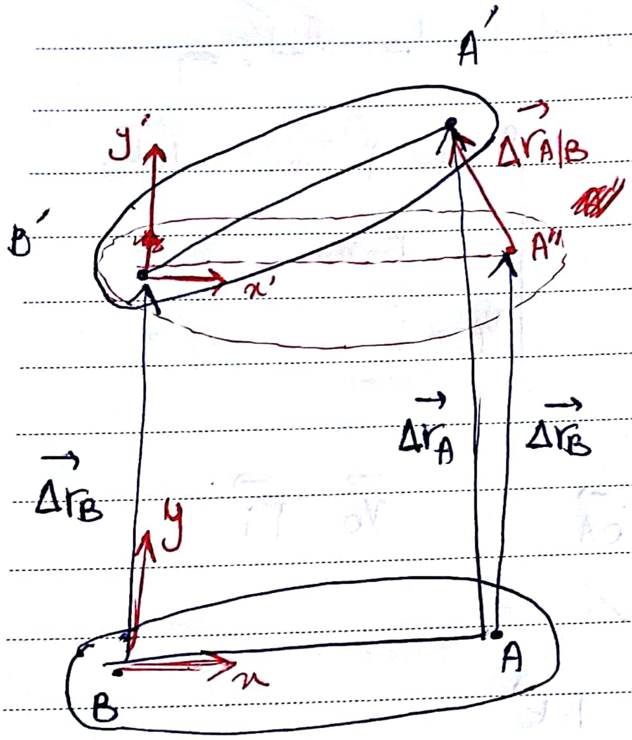
سرعت نسبی:

دستگاه غیر دوار x-y به نقطه B متصل شده است.



از دید ناظر ایستاده در دستگاه x-y ، نقطه A حول نقطه B دوران می‌کند.

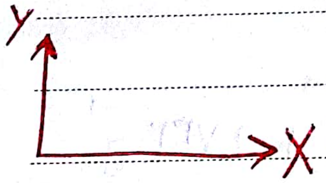
$$\vec{\Delta r}_A = \vec{\Delta r}_B + \vec{\Delta r}_{A/B} \quad (I)$$



دستگاه x-y می‌تواند به نقطه A نیز متصل گردد ⇐ از دید ناظر، نقطه B حول نقطه A دوران می‌کند.

$$\vec{\Delta r}_B = \vec{\Delta r}_A + \vec{\Delta r}_{B/A} \quad (II)$$

$$(I, II) \quad \vec{\Delta r}_{A/B} = -\vec{\Delta r}_{B/A}$$



برای بازه زمانی کوچک Δt:

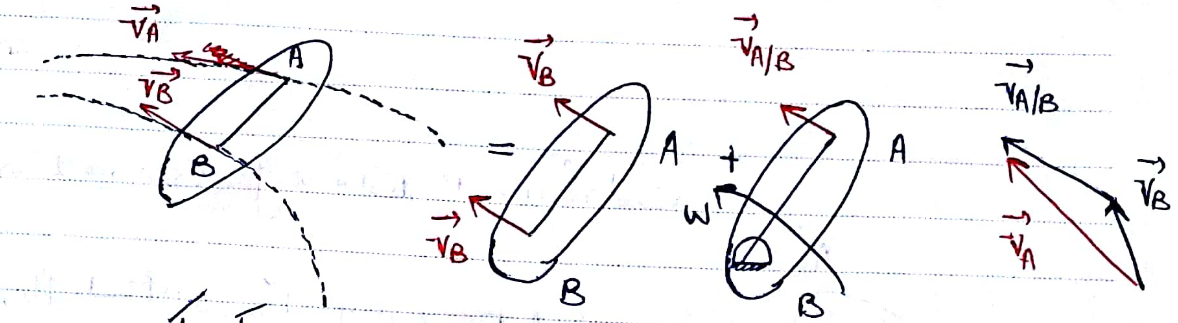
$$(I) \quad \frac{\vec{\Delta r}_A}{\Delta t} = \frac{\vec{\Delta r}_B}{\Delta t} + \frac{\vec{\Delta r}_{A/B}}{\Delta t} \rightarrow \vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \xrightarrow{\vec{V}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}}$$

PAPCO

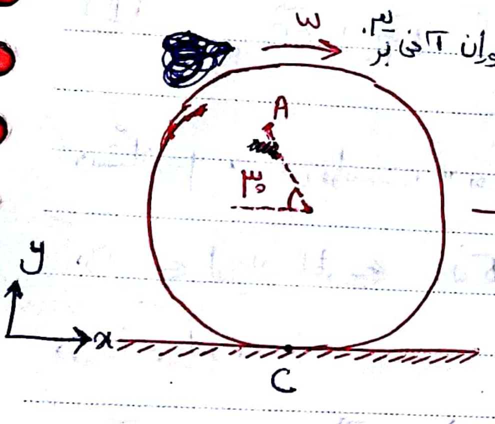
مرکز آنی ۲ — مسیر باهم موازی بردار

هم حرکت انتقال باشه هم دوران



حرکت کلی = انتقال خالص + دوران خالص

← مرکز آنی اگر خواستیم از راه دیگری بریم می‌توانستیم از مرکز دوران آنی بریم.



$\rightarrow V_o = 3\ m/s$

مثال)

$OA = 200\ mm$

$r = 300\ mm$

$V_A = ?$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{V}_{A/O} = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{OA} \qquad \vec{V}_O = 3\vec{i}$$

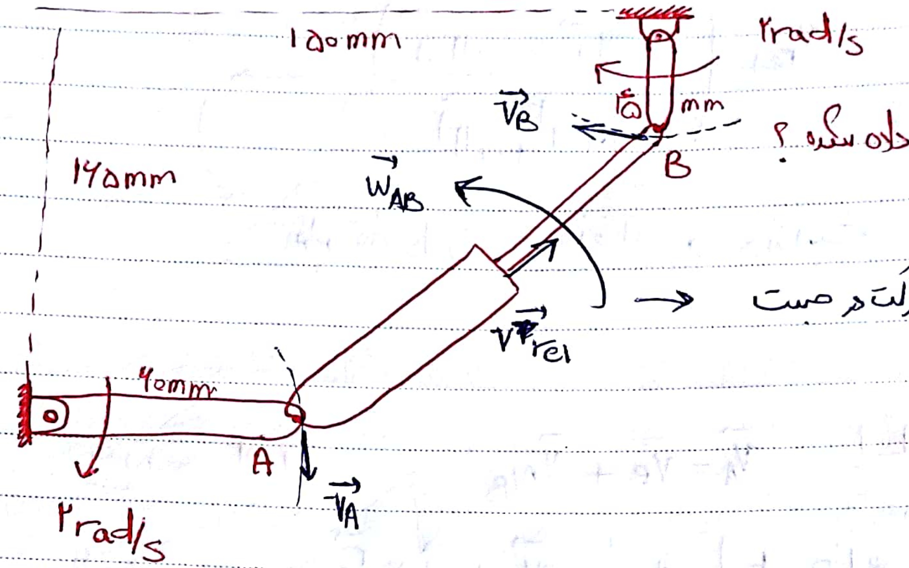
$$\vec{V}_O = r\omega \rightarrow \omega = \frac{3}{0.3} = 10 \qquad \vec{\omega} = -10\vec{k}$$

$$= 3\vec{i} + -10\vec{k} \times 0.2\left(-\cos 30\,\vec{i} + \sin 30\,\vec{j}\right) = 4\vec{i} + 1.732\,\vec{j}$$

$$|\vec{V}_A| = 4.36\ m/s$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$ مرور رابطه

مثال) $\vec{\omega}_{AB}$ در لحظه نشان داده شده؟



جک کشش می آید، حرکت مثبت پادساعتگرد

$$\overset{?}{\vec{v}_B} = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \overset{?}{\vec{\omega}_{AB}} \times \vec{r}_{A/B} + \overset{?}{\vec{v}_{rel}}$$

$$\vec{v}_B = -2 \times 0.045\,\vec{i} = -0.09\,\vec{i}$$

$$\vec{v}_A = -2 \times 0.06\,\vec{j} = -0.12\,\vec{j}$$

چرا این طوری ننوشتیم باید بالای صفحه رابطه ای که نوشته بودیم؟

عبارت $\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$ برای دوران خالص بود در صورتی که این جا دوران خالص نداریم حرکت نسبی جک هم هست.

$$\vec{\omega}_{AB} = \omega_{AB}\,\vec{k} \qquad \vec{r}_{B/A} = \left(\frac{150-60}{1000}\right)\vec{i} + \left(\frac{145-45}{1000}\right)\vec{j}$$

$$= 0.09\,\vec{i} + 0.1\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_{rel} = v_{rel} \times \frac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|}$$

? ← (v_{rel})

PaPCO

$$\Rightarrow -0{,}09\,\vec{i} = -0{,}012\,\vec{j} + \omega_{AB}\,\vec{k} \times \left(0{,}09\,\vec{i} + 0{,}12\,\vec{j}\right) + v_{rel}\left(\frac{-0{,}09\,\vec{i} + 0{,}12\,\vec{j}}{\sqrt{0{,}09^2 + 0{,}12^2}}\right)$$

✓ برابر قرار دادن . $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و درنهایت ω_{AB} و v_{rel}

پس در اصل $\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$ رابطه اصلی ما است

ولی $\vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$ = رابطه خاص است چون

باید دوران خالص داشته باشد تا از این رابطه استفاده کنیم اگر هم

خالص نبود باید شکل صفحه قبل عمل کنیم.

جلسه جدید

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

دوران خالص $\quad \vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$

ترکیب بقیه حرکات $\quad \vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{v}_{rel}$

مرکز آنی بدون سرعت (مرکز آنی دوران)

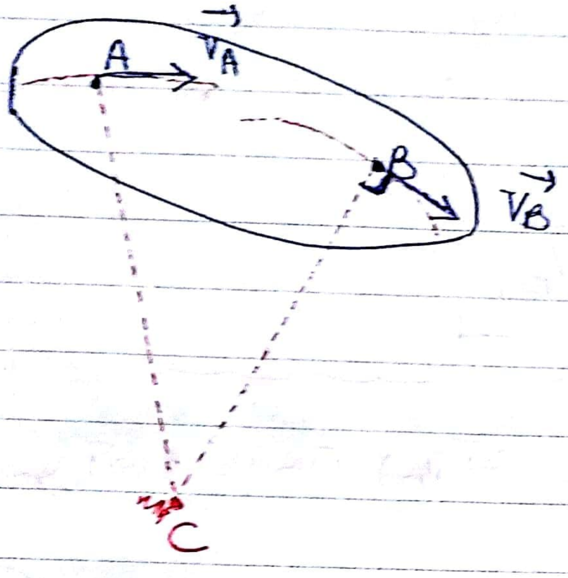
فرض کنید نقطه‌ای از جسم دارای سرعت صفر باشد در آن صورت می‌توان فرض کرد که در آن لحظه جسم حول آن نقطه دوران می‌کند. به این نقطه مرکز آنی دوران (مرکز آنی بدون سرعت) می‌گویند.

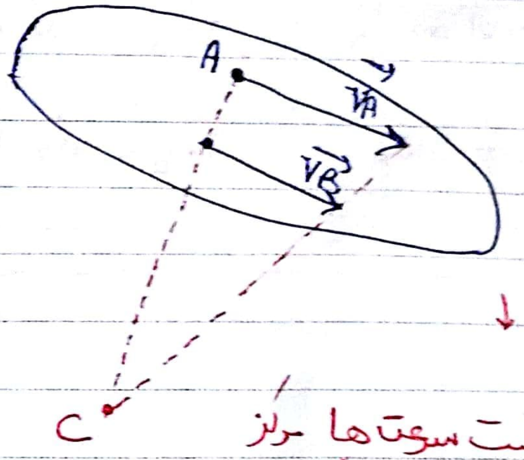
ویژگی‌ها

- با زمان محل آن عوض می‌شود (نقطه ثابت بر روی جسم یا صفحه حرکت نمی‌باشد)
- ممکن است بر روی جسم نباشد.
- به طور کلی دارای شتاب صفر نیست بنابراین (مرکز آنی بدون شتاب) نخواهد بود.

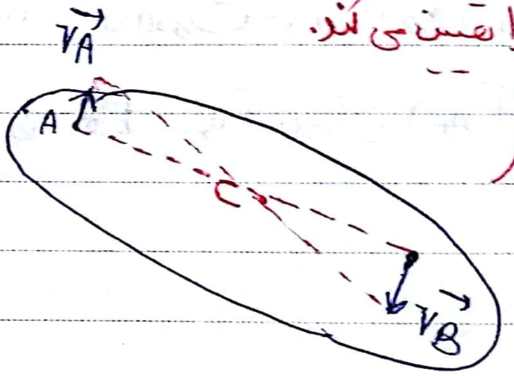
PAPCO

* مرکز آنی دوران، با داشتن ۲ نقطه بدست می آید.

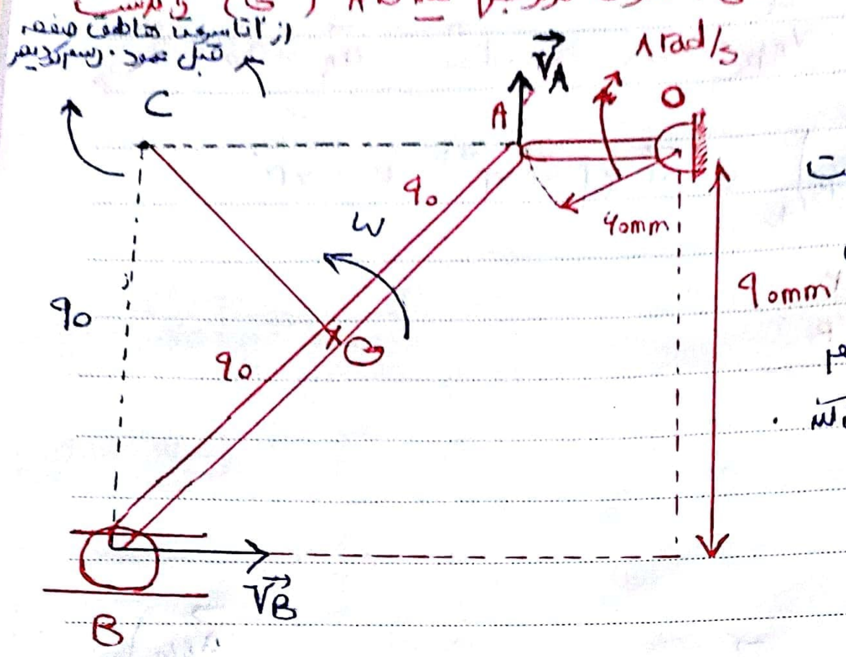




نسبت سرعت ها مرکز C را تعیین می کند.



مثال) در لحظه عبور OA از وضعیت افقی، سرعت مرکز جرم میله AB (G) را بدست آورید.



پس برای AO ، v_A رو به بالاست

و v_A برای OA و AB رو به بالاست

فرقی نداره واسه جفتشون و v_B هم

که مقیده نمیتونه خارج مسیر حرکت کنه.

$$|\vec{V}_A| = v_A = 0.06 \times 8 = 0.48 \ m/s$$

$$v_A = \overline{AC}\, w = \sqrt{180^2 - 90^2} \times 10^{-3} \times w = 0.48 \Rightarrow w = 3.14 \ rad/s$$

$$v_G = \overline{CG}\, w = 0.09 \times 3.14 = \text{~~~} \ m/s \checkmark$$

چرا چون وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه نصف وتر است.

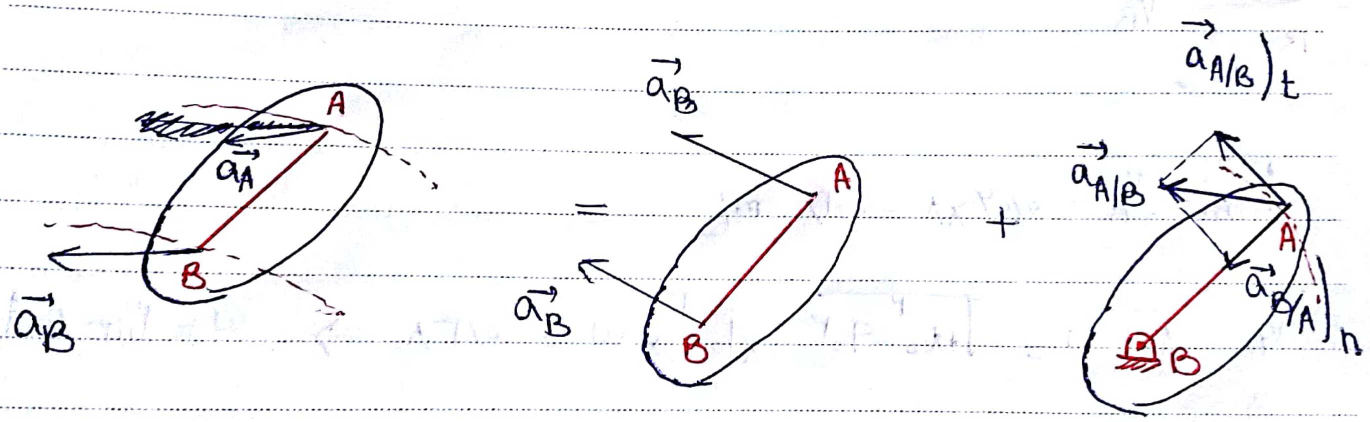
Subject
Date

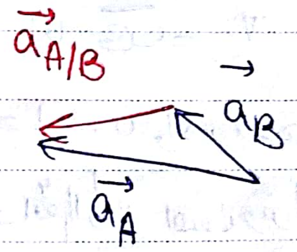
شتاب نسبی :

سرعت نسبی $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \Rightarrow$ شتاب نسبی $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$

$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_{A/B})_n + \vec{a}_{A/B})_t = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

$$\begin{cases} a_{A/B})_n = r\omega^2 = \dfrac{v_{A/B}^2}{r} \\ a_{A/B})_t = r\alpha = \end{cases}$$





نکته : شتاب، مماس بر مسیر الزاماً نمی باشد.

نکته : مرکز آنی سرعت، مرکز آنی شتاب نیست ، اگر شتاب نقطه مرکز جرم آنی دوران را داشته باشیم ، شتاب بقیه نقاط را می توان بدست آورد.

PaPCO

مثال)

$\vec{a}_o = ?$

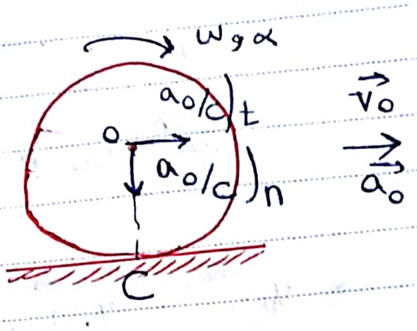
$\vec{a}_o = \vec{a}_c + \vec{a}_{o/c}$

$\vec{a}_c = r\omega^2 \vec{j}$

$\vec{a}_{o/c})_t = r\alpha \, \vec{i}$

$\vec{a}_{o/c})_n = -r\omega^2 \vec{j}$

$\vec{a}_o = r\omega^2 \vec{j} + (r\alpha \vec{i} - r\omega^2 \vec{j}) = r\alpha \vec{i}$

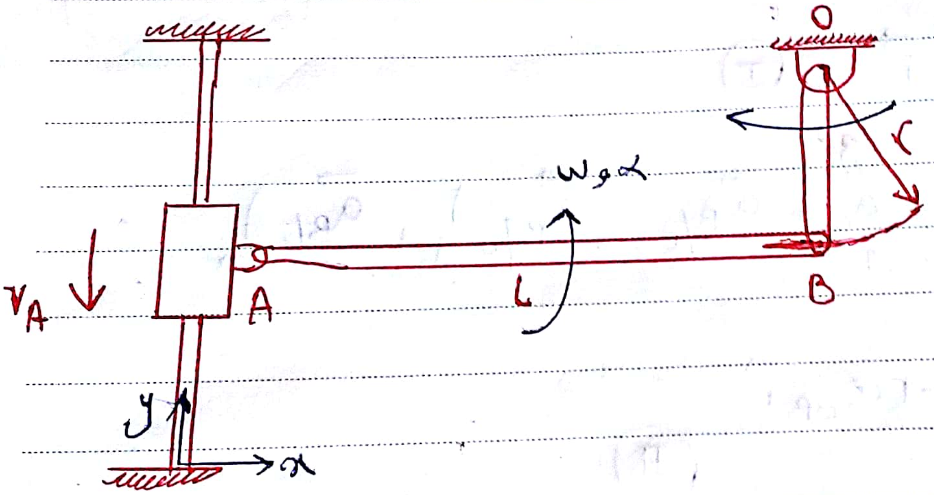


مثال)

ثابت v_A

درحالت فوق (OB قائم و AB افقی)

$\alpha_{OB} = ?$



P4PCO

Subject
Date

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

$$\begin{cases} \vec{V}_B = V_B \vec{i} \\ \vec{V}_A = -V_A \vec{j} \\ \vec{V}_{B/A} = L\omega \vec{j} \end{cases}$$

A ثابت باشد B صول اش بصرف .

$$\Rightarrow V_B \vec{i} = -V_A \vec{j} + L\omega \vec{j} \Rightarrow \begin{cases} V_B = 0 \\ \omega = \dfrac{V_A}{L} \end{cases}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_{B/A})_t + \vec{a}_{B/A})_n = (\alpha \vec{K} \times L\vec{i}) + (\vec{\omega} K \times (\vec{\omega} \vec{K} \times L\vec{i}))$$

$$= L\alpha \vec{j} - L\omega^2 \vec{i} \quad \text{I}$$

از طرفی $\rightarrow \quad \vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{a}_{B/O} = \vec{a}_{B/O})_t + \vec{a}_{B/O})_n$

$$\vec{a}_{B/O})_t = -r\alpha_{OB} \vec{i}$$

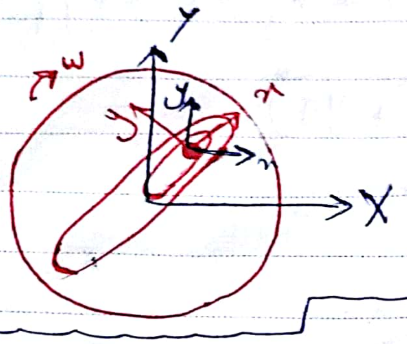
II

$$\vec{a}_{B/O})_n = \sim \vec{j}$$

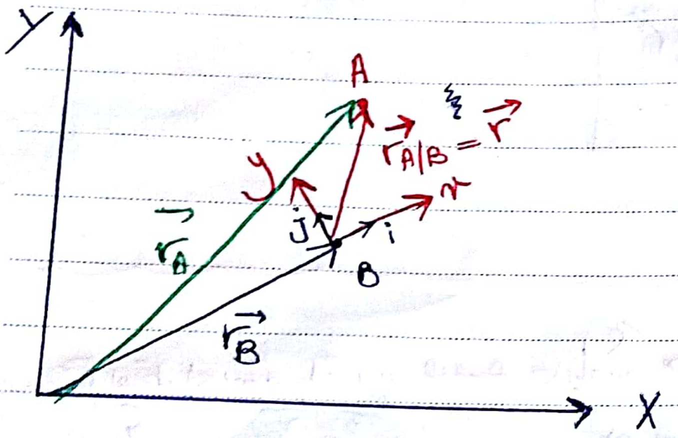
I, II = مساوی اند $\rightarrow \quad L\omega^2 = r\alpha_{OB} \Rightarrow \alpha_{OB} = \dfrac{L\omega^2}{r} = \dfrac{V_A^2}{Lr}$

PAPCO

حرکت نسبت به محورهای دوار



حرکت:
- مطلق $X-Y$
- نسبی انتقالی $x-y$
- نسبی دورانی $x-y$



$$\vec r_A = \vec r_B + \vec r_{A/B} = \vec r_B + \vec r$$

$$\vec r = x\vec i + y\vec j$$

$$\Rightarrow \vec r_A = \vec r_B + (x\vec i + y\vec j)$$

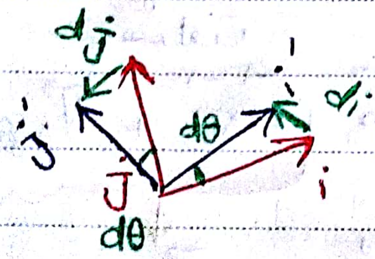
سرعت نسبی

$$\dot{\vec r}_A = \dot{\vec r}_B + \frac{d}{dt}(x\vec i + y\vec j) \Rightarrow \vec v_A = \vec v_B + \frac{d}{dt}(x\vec i + y\vec j)$$

$$\vec v_B + (\dot x\vec i + \dot y\vec j) + x\dot{\vec i} + y\dot{\vec j}$$

مشتق زمانی بردارهای یکه

مقدار (اندازه)



$$d\vec i = (1\,d\theta)\,\vec j$$

$$d\vec j = (1\,d\theta)(-\vec i)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\vec i}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec j = \omega \vec j \\ \dfrac{d\vec j}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dt}\vec i = -\omega\vec i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec i} = \vec\omega \times \vec i \\ \dot{\vec j} = \vec\omega \times \vec j \end{cases}$$

عمود است
برداری است

$$\rightarrow \vec{V}_A = \vec{V}_B + (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) + x(\vec{\omega}\times\vec{i}) + y(\vec{\omega}\times\vec{j})$$

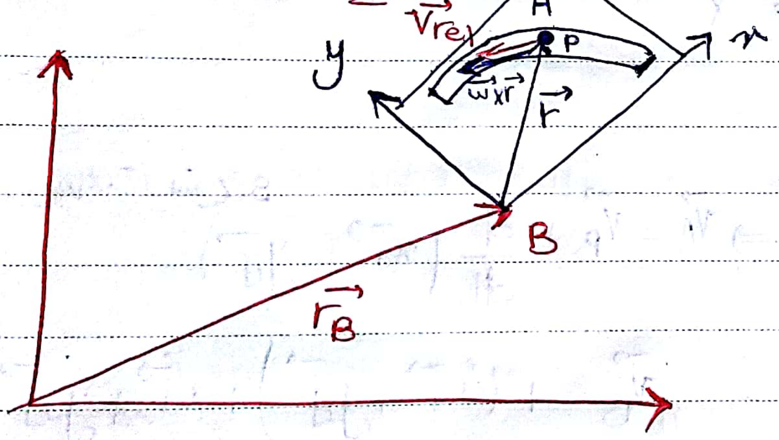
$$= \vec{V}_B + (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) + \vec{\omega}\times(x\vec{i} + y\vec{j})$$

$$= \;'' \;+\; '' \;+\; \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{r}}$$

($\vec{V}_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{r}$) $\downarrow$ $\vec{V}_{A/B}$

P نقطه ای متعلق به صفحه می باشد که لحظه t، دقیقاً زیر A می باشد



$\vec{V}_{A/P}$, $\vec{V}_{P/B}$ ← می‌نویسیم

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{V}_{rel}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{V}_{A/P}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{A/P}$$

V_A

V_B

$\vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{V}_{P/B}$

$\vec{V}_{rel} = \vec{V}_{A/P}$

که در واقع

یا می‌شه گفت

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{V}_{A/P}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$$

Subject
Date

به طور کلی:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} \rightarrow \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{XY} = \left(\dot{V}_x \vec{i} + \dot{V}_y \vec{j}\right) + \left(V_x \dot{\vec{i}} + V_y \dot{\vec{j}}\right)$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{XY} = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{xy} + \vec{\omega} \times \vec{V}$$

جلسه جدید دینامیک

شتاب نسبی:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_{rel}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \underbrace{\dot{\vec{r}}}_{?} + \dot{\vec{V}}_{rel}$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{V}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{V}_{rel} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \rightarrow \dot{\vec{V}}_{rel} = (\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}) + (\dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}}) =$$

$$\rightarrow (\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}) + \dot{x}(\vec{\omega} \times \vec{i}) + \dot{y}(\vec{\omega} \times \vec{j})$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{V}}_{rel} = \vec{a}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{rel}$$

نرخ تغییرات زمانی نسبت به دستگاه مطلق

$$\left(\dot{\boxed{\vec{V}}}\right)_{XY} = \left(\dot{\boxed{\vec{V}}}\right)_{xy} + \vec{\omega} \times \boxed{\vec{V}}$$

این رابطه کلی است به مفهوم در دینامیک ۲ . جای مرجع هر چی بزاری صدق میکند همین طور که در بالا هم همین طور شد.

ادامه در صفحه بعد

PAPCO

$$\vec a_A = \vec a_B + \dot{\vec\omega}\times\vec r + \vec\omega\times\left(\vec v_{rel} + \vec\omega\times\vec r\right) + \left(\vec a_{rel} + \vec\omega\times\vec v_{rel}\right)$$

$$\vec a_A = \vec a_B + \dot{\vec\omega}\times\vec r + \vec\omega\times\left(\vec\omega\times\vec r\right) + 2\,\vec\omega\times\vec v_{rel} + \vec a_{rel}$$

مماسی — جانب مرکز — شتاب کوریولیس — شتاب نسبی

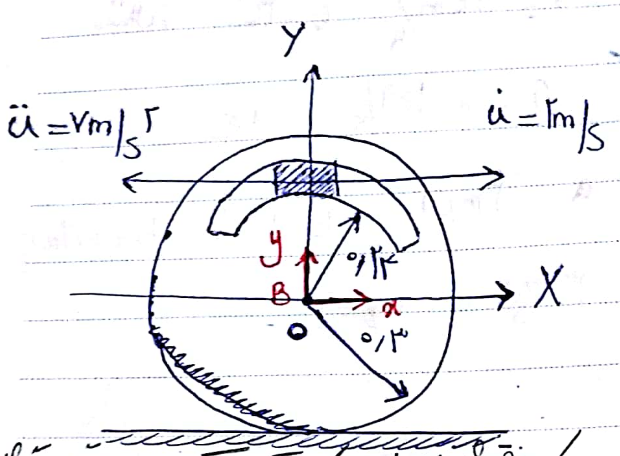
$\vec a_{P/B}$ — $\vec a_{A/P}$

شتاب کوریولیس شتابی است که از تغییر جهت حاصل می شود.

۲تا سبز اول (فرکانس) در یک دستگاه هستند و بقیه در یک دستگاه دیگر. یعنی وقتی هر رو بدست آوردی خواستی در بالا در رابطه جمع کنی باید همه در یک دستگاه باشند یا X-Y یا x-y.

Subject
Date

مثال) شتاب مطلق و سرعت مطلق لغزنده؟



$a_o = 5 m/s^2$

$V_o = 3 m/s$

فرقش این است که حرکت می‌کند و دستگاه دیگر ثابت.

اول باید به دستگاه دوار، $x-y$ درنظر بگیریم. شکل روی o می‌گیریم

$\vec{a}_B = -5\vec{i}$ $\qquad \vec{V}_B = -3\vec{i}$

$\vec{r} = 0.24\vec{j}$ $\qquad \vec{V}_{rel} = 2\vec{i}$ $\qquad \vec{a}_{rel} = -7\vec{i}$

$\vec{V}_o = \vec{V}_C + \vec{V}_{o/C} = \vec{\omega} \times \vec{r}_o \rightarrow V_o = r_o \omega \qquad \omega = \frac{V_o}{r_o} = \frac{3}{0.3} = 10$

$\vec{\omega} = 10\vec{k}$

$a_o = r_o \alpha \qquad \alpha = \frac{a_o}{r_o} = \frac{5}{0.3} \qquad \vec{\alpha} = \frac{50}{3}\vec{k}$

$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_{rel} = \cdots = -3.4\vec{i}$

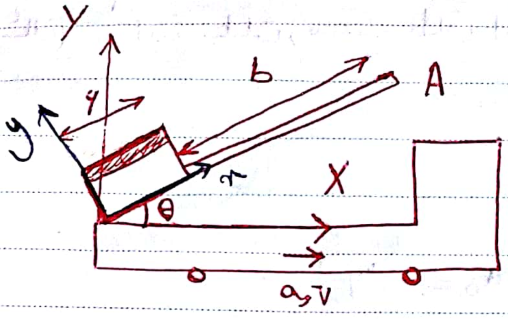
$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_{rel} + \vec{a}_{rel} = \cdots = -2\vec{i} + 16\vec{j}$

P4PCO

در این مثال در لحظه‌ی نشان داده شده هر ۲ دستگاه هم‌راستا بوده اند بنابراین بردارها

با یک سری بردار یک شتاب محاسبه شده‌اند.

Subject
Date



مثال) $v = 60 km/h$ $\theta = 30^\circ$

$\dot{\theta} = 10 \ deg/s = cte$

$a = -3 m/s^2$ ، $b = 1.5 m$ ، $\dot{b} = 0.6 m/s$

$\ddot{b} = -3 m/s^2$ $a_A = ?$

اول از همه دستگاه دوار خود را انتخاب می‌کنیم

$$\vec{\omega} = 10 \frac{\pi}{180} \vec{k} = \frac{\pi}{18} \vec{k} \qquad \dot{\vec{\omega}} = 0$$

$x-y$
$$\begin{cases} \vec{r} = (b+6)\vec{i} = 7.5 \vec{i} \\ \vec{v}_{rel} = 0.6 \vec{i} \\ \vec{a}_{rel} = -3\vec{i} \end{cases}$$

$$\vec{a}_B = -3 (\vec{i})_{XY} \overset{\text{تصویر}}{=} -3(\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j})$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

$$= \dots = -3.313\vec{i} + 1.79\vec{j}$$

PAPCO

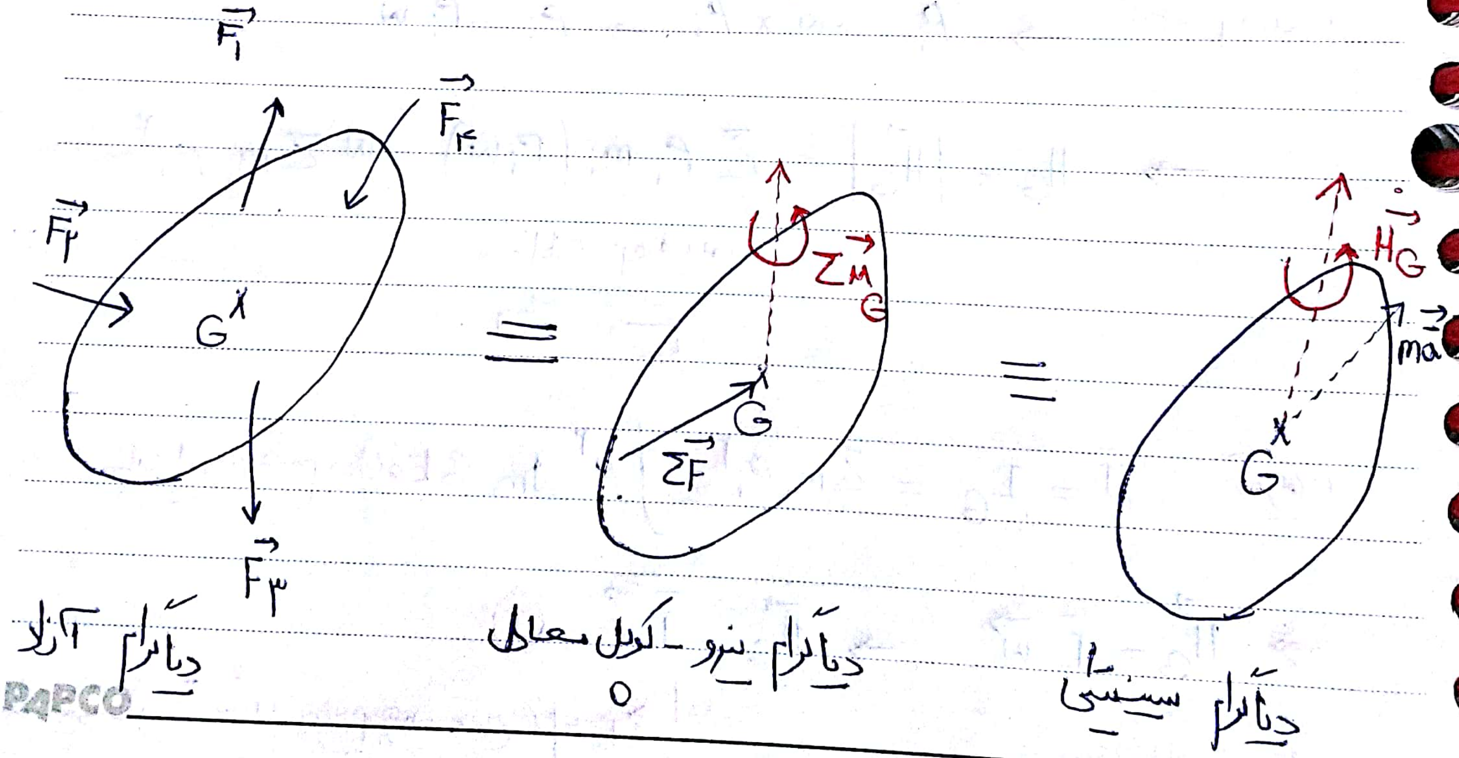
فصل ششم: سینتیک اجسام صلب در صفحه

روش‌های بررسی:

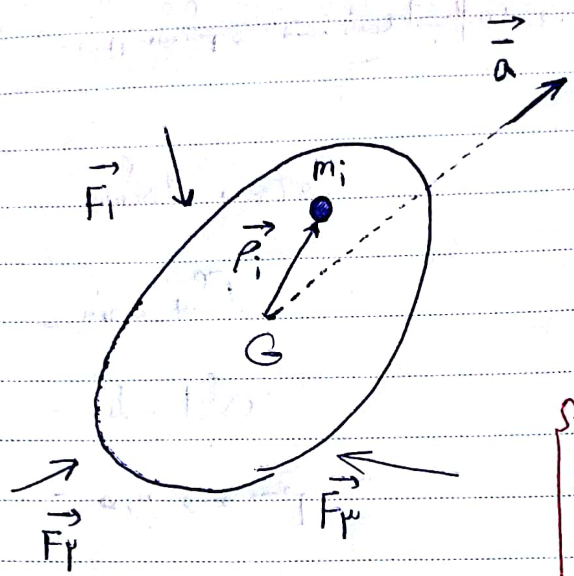
- نیرو، گشتاور
- کار - انرژی
- ضربه و مومنتم

الف) نیرو - گشتاور:

- معادله نیرو $\vec{a}$ شتاب مرکز جرم $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
- معادله گشتاور $\sum \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G$



علامت‌های حرکت در صفحه :



یادآوری : $\vec{H}_G = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i$

$\vec{\omega} = \omega \vec{k}$

$\vec{\alpha} = \alpha \vec{k}$

$\vec{a} =$ شتاب مرکز جرم

$\vec{\rho}_i$: بردار مکان ذره m_i نسبت به G

$\dot{\vec{\rho}}_i$: بردار سرعت ذره m_i نسبت به G

جسم صلب $\rightarrow$ $\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i \rightarrow \dot{\rho}_i = \rho_i \omega$

$$\rightarrow H_G = |\vec{H}_G| = \sum_i \rho_i m_i (\rho_i \omega) = \omega \sum m_i \rho_i^2$$

به خاطر جسم صلب بودن این گونه نوشتیم.

تعریف $\bar{I} = I_G = \sum m_i \rho_i^2 = \int \rho^2 \, dm$ ممان اینرسی جسم حول نقطه G

$$\rightarrow \vec{H}_G = \bar{I} \vec{\omega} \rightarrow \dot{\vec{H}}_G = \bar{I} \vec{\alpha} \quad (I)$$

چرا از $\bar{I}$ مشتق نگرفتیم؟ چون توزیع جرم جسم صلب با تغییر زمان عوض نمی‌شود.

از طرفی → $\sum \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G \overset{\text{I}}{\underset{\text{II}}{\Longrightarrow}} \sum \vec{M}_G = \bar{I}\vec{\alpha}$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}\sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \sum \vec{M}_G &= \bar{I}\vec{\alpha}\end{aligned}}$$

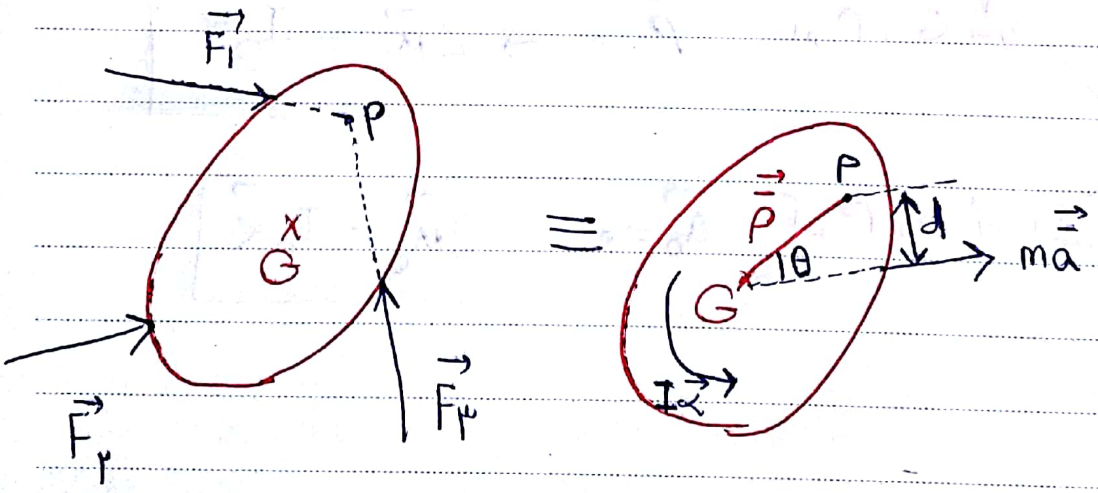
x و y → k

۳ معادله

I خاصیتی از جسم که اینرسی دورانی جسم و یا مقاومت آن در مقابل تغییر سرعت زاویه‌ای می‌باشد از طرفی از قبل هم می‌دونستیم که m (جرم) مقاومت در برابر تغییر سرعت خطی بود.

عزم در معادلات اسکالر :

گاهی راحت‌تر است که گشتاور نیروها حول نقطه‌ای محاسبه شود:



ادامه)

یادآوری : $\sum \vec{M}_P = \dot{\vec{H}}_G + \vec{\bar{\rho}} \times m\vec{\bar{a}}$

$$\sum \vec{M}_P = \bar{I}\vec{\alpha} + m\bar{a}\underbrace{\bar{\rho}\sin\theta}_{d}\,\vec{k}$$

$$\boxed{\sum M_P = \left|\sum \vec{M}_P\right| = \bar{I}\alpha + m\bar{a}\,d}$$

نکته : اگر نقطه P همان G شود ، $d=0$ ($\vec{\bar{\rho}}=0$) $\rightarrow$ $\boxed{\sum M_G = \bar{I}\alpha}$

یادآوری $\sum \vec{M}_P = \dot{\vec{H}}_P\big)_{rel} + \vec{\bar{\rho}} \times m\vec{a}_P$

$$\boxed{\sum \vec{M}_P = I_P\vec{\alpha} + \vec{\bar{\rho}} \times m\vec{a}_P}$$

نکته →

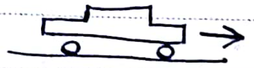
1. اگر P ، G شود $\quad \vec{\bar{\rho}}=0 \rightarrow \sum \vec{M}_G = I_G\vec{\alpha}$

2. اگر نقطه P ثابت شود $\quad \vec{a}_O = 0 \quad \sum \vec{M}_O = I_O\vec{\alpha}$

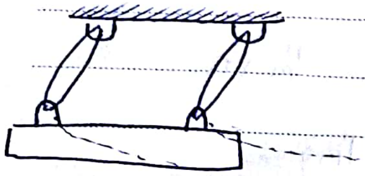
جلسه جدید

- عکس واسه سرور میزهای جلسه قبل درگوشی

حالت اول : انتقال



حرکت انتقالی جسم صلب ← مستقیم الخط / منحنی الخط

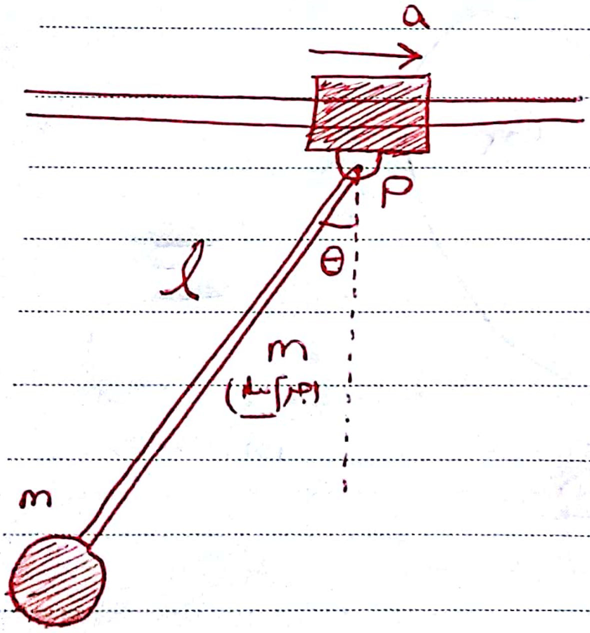


حرکت انتقالی ← $\vec{\omega} = \vec{\alpha} = 0$

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = m\vec{a} \\ \sum \vec{M}_G = \bar{I}\vec{\alpha} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \sum \vec{M}_G = 0 \end{cases}$$

($\bar{I}\vec{\alpha}$) ← در حرکت انتقالی نداریم

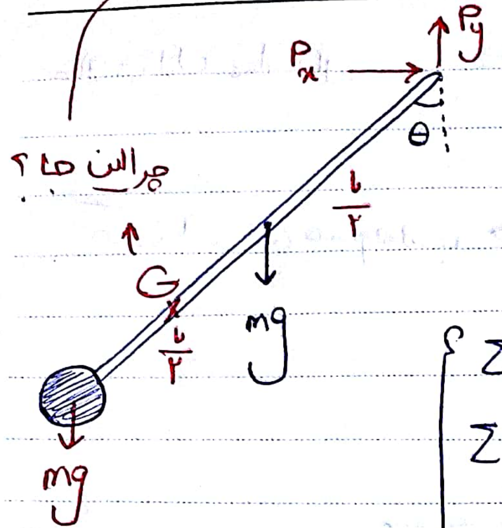
مثال) حرکت با شتاب ثابت غلاف ، باعث ایجاد θ پایدار می‌شود



- اصطکاک صرف نظر

$a = ? \rightarrow \theta = 15^\circ$

حل)



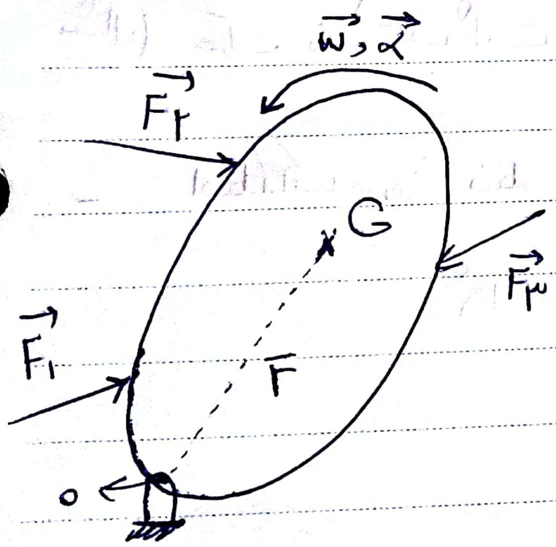
چون m وسط طرهم m ۲

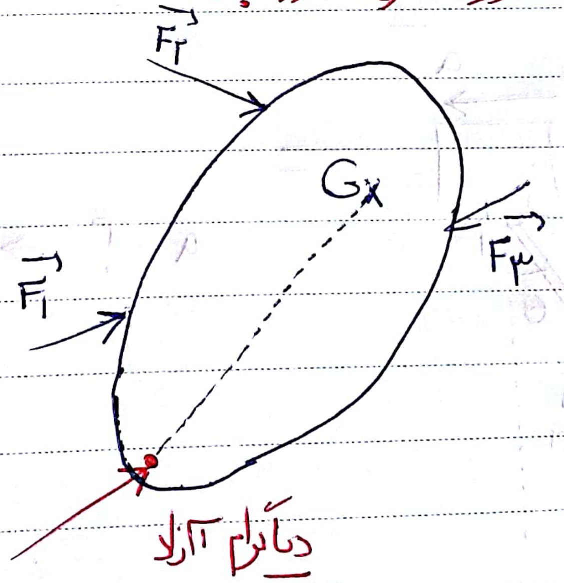
همه تا میله بعن آن‌هاـی شود مرکز جرم

$$\begin{cases} \Sigma F_x = m a_x \\ \Sigma F_y = m a_y \\ \Sigma M_G = \bar{I}\alpha = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_x = 2m \times a \\ P_y - 2mg = 0 \\ M_{mg} - M_{mg} + P_y \frac{3L}{4}\sin\theta - P_x \frac{3L}{4}\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2mg \frac{3L}{4} \sin\theta = 2ma \frac{3L}{4} \cos\theta \Rightarrow a = g\,tg\,\theta$$

حالت دوم دوران حول محور ثابت

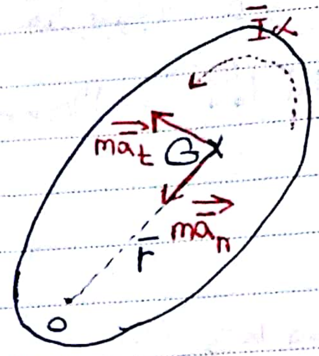




=

در صفحه بعد

ادامه $\equiv$



دیاگرام سینتیکی

a_n و a_t مثل همون قدیم هستن، $\bar{I}\alpha$ و $r\omega^2$

بطور کلی

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = m\vec{a} \\ \sum \vec{M}_G = \bar{I}\vec{\alpha} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_t = m\vec{a}_t \\ \sum \vec{F}_n = m\vec{a}_n \end{cases}$$

اثبات شد $\rightarrow$

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = m\vec{a} \\ \sum \vec{M}_P = I_P\vec{\alpha} + \vec{\rho} \times m\vec{a}_P \end{cases} \xrightarrow{P=O} \sum \vec{M}_O = I_O\vec{\alpha}$$

می‌دونیم نوشتن رو اساس صفر
یا به جای P، O بذاریم

$\vec{a}_O = 0$ صفر

حال I_O را باید بدست آوریم.

از دیاگرام سینتیکی $\sum \vec{M}_P = \bar{I}\vec{\alpha} + \vec{\rho} \times m\vec{a}$, $P=O$ او

$$\begin{cases} \sum M_O = \bar{I}\alpha + m a_t \bar{r} \\ a_t = r\alpha \end{cases} \quad \sum M_O = \bar{I}\alpha + m\bar{r}^2\alpha = (\bar{I} + m\bar{r}^2)\alpha$$

باید $= I_O\alpha$

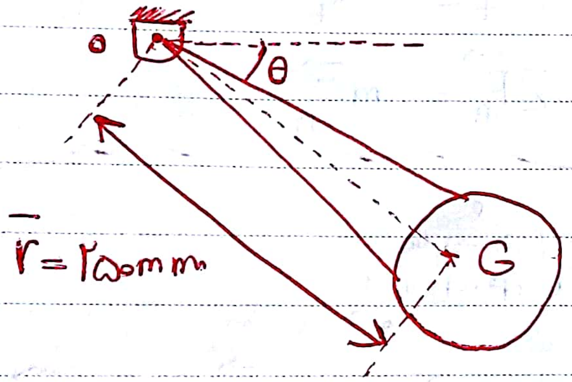
پس در نهایت $\Rightarrow$

$$I_O = \bar{I} + m\bar{r}^2$$

مثال) آونگ از حالت سکون در $\theta = 0$ رها می‌شود. مقدار نیروی O در $\theta = ۶۰^\circ$ چقدر است؟ $m = ۷,۵ \ kg$ شعاع ژیراسیون $= ۲۹۵ \ mm$

نکته: برای بدست آوردن ممان اینرسی اجسام هندسی ساده به شکلی نسبت طبق روابط هندسی و ... بدست می‌آید ولی برای اجسام پیچیده مثل سوال اینجا کمیتی به نام r_g یا شعاع ژیراسیون تعریف می‌شود که

$$I = m r_g^2$$



حل) $I = m r_g^2$

حرکت دورانی حول نقطه ثابت است:

$$\begin{cases} \Sigma F_t = m\bar{a}_t = m\bar{r}\alpha \\ \Sigma F_n = m\bar{a}_n = m\bar{r}\omega^2 \\ \Sigma M_O = I_O \alpha \end{cases}$$

ادامه در صفحه بعد

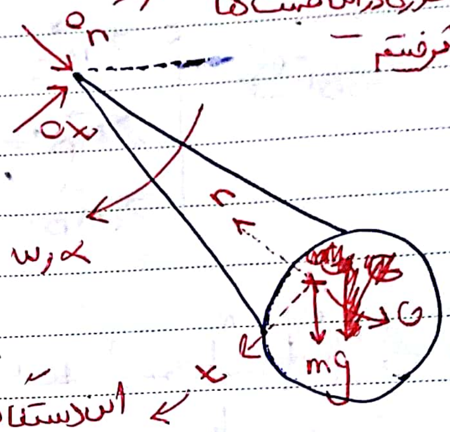
PAPCO

Subject:
Date

$\sum M_o = I_o \alpha \Rightarrow mg\bar{r}\cos\theta = (m r_g^2)\alpha$

$\Rightarrow ۷٫۵ \times ۹٫۸ \times ۰٫۲۵ \times \cos\theta = ۷٫۵ \times ۰٫۲۹۵^2 \times \alpha$

$\boxed{\alpha = ۲۸٫۲ \cos\theta}$



این ۲ تا رو دلخواه این
طوری در این جهت‌ها
گرفتم

$\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega \rightarrow \int_0^\theta ۲۸٫۲ \cos\theta\, d\theta = \int_0^\omega \omega\, d\omega$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\omega^2 = ۲۸٫۲ \sin\theta$ @ $\theta = ۹۰°$ ↗ $\alpha = ۱۴٫۱°$ ↘ $\omega = ۴۸٫۸$

این دستگاه n-t واسه حل پاسخ O راحت‌تر است
واسه نقطه G دستگاه مختصات انتخاب کردم.

$$\begin{cases} \sum F_t = m\bar{r}\alpha \\ \sum F_n = m\bar{r}\omega^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -O_t + mg\cos\theta = m\bar{r}\alpha \\ -O_n - mg\sin\theta = m\bar{r}\omega^2 \end{cases}$$

$O_t = ۱۰٫۳۷$

$O_n = ۱۵۵٫۲$

$\rightarrow O = \sqrt{O_t^2 + O_n^2} = ۱۵۵٫۶\ N$

PAPCO

حالت سوم: حرکت کلی در صفحه

حرکت کلی = دوران + انتقال

نیرو: $\sum \vec{F} = m\vec{\bar{a}}$

گشتاور:

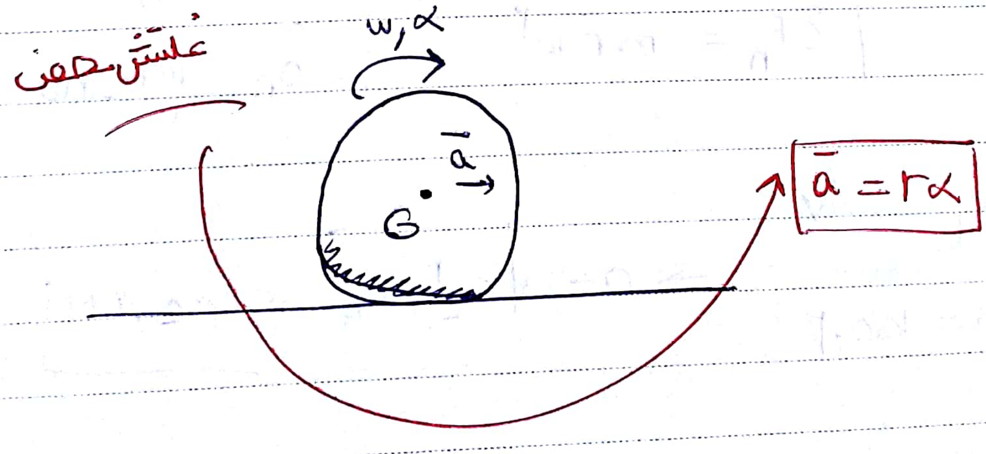
$$\sum \vec{M}_G = \bar{I}\vec{\alpha}$$

$$\sum \vec{M}_P = \bar{I}\vec{\alpha} + \vec{\bar{\rho}} \times m\vec{\bar{a}}$$

$$\sum \vec{M}_P = I_P\vec{\alpha} + \vec{\bar{\rho}} \times m\vec{a}_P$$

نکته: در حالت کلی ممکن است بین $\vec{\bar{a}}$ و $\vec{\alpha}$ رابطه (وجود داشته باشد) یا (وجود نداشته باشد)

↓ مقید (سینماتیکی) ↓ نامقید



یکی از سازه‌هایی که انواع ترکیبات را داره و سکته سوالات امتحانی خوبی ببره ازش در زمینه حرکت کلی طرح کرد روی سطح شیب دار.

مثال) حلقه فلزی به جرم m و شعاع r = 150 mm از حالت سکون روی شیب ۲۰° رها می‌شود

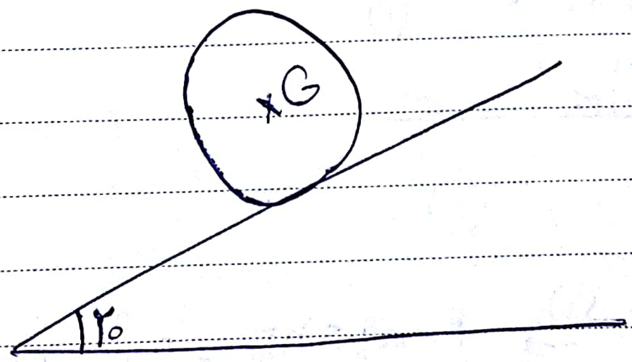
$\mu_s = 0/15$ $\mu_k = 0/12$

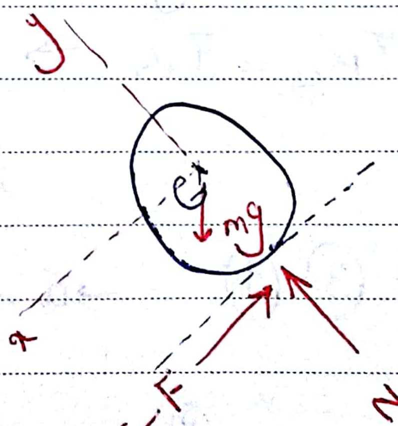
α حلقه = ؟

زمان t لازم جهت پیمودن ۳m مسافت به سمت پایین = ؟

حل) ۲ حالت ممکن

۱) غلتش بدون لغزش ۲) غلتش با لغزش حالت سوم لغزش محض نداریم چون اصطکاک داریم





← جهت F یکی از مهمترین عامل هاست حالا ما دلخواه رو به بالا گرفتیم

(ادامه)

۲ حالت ممکن

۱) غلتش بدون لغزش < حرکت مقید ← قید سینماتیکی ← $\bar{a} = r\alpha$

اصطکاک ایستایی (چون اگه بدونیم در اصطکاک جنبشی سطح ها روی هم می لغزند اما در غلتش سطح ها روی هم نمی لغزند)

۲) غلتش با لغزش < حرکت نامقید ← $\bar{a} \neq r\alpha$

اصطکاک جنبشی

یکی از مسائل مهمی که سوال اینه که حالت به گوی رو پرت می کنی این گوی قطعاً اول همزمان ممکنه غلتش و لغزش رو باهم داشته باشه چه موقع به غلتش محض می رسه موقعی که شرط $\bar{a} = r\alpha$ رو ارضا کنه.

فرض: غلتش بدون لغزش ؟

$$\Sigma F_x = m a_x \rightarrow mg\sin 20 - F = m\bar{a} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = m a_y \rightarrow -mg\cos 20 + N = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_G = \bar{I}\alpha \rightarrow Fr = (mr^2)\alpha \quad (3)$$

$$\bar{a} = r\alpha \quad (4)$$

$$(1)(3)(4) \rightarrow \bar{a} = \frac{g}{2}\sin 20 \xrightarrow{(1)} F = mg\sin 20 - m\frac{g}{2}\sin 20 = 0/17\,mg$$

$$(2) \rightarrow N = mg\cos 20 = 0/94\,mg$$

چک کردن فرض اولیه　　$F_{max} = \mu_s N = 0.15 \times (0.94 mg) = 0.141 mg$

$0.141\, mg < 0.17 mg$ ✗　　پس فرض اولیه غلط است

و غلتش با لغزش همراه است.

غلتش با لغزش　　$\bar{a} \neq r\alpha$

$\sum F_y = m\bar{a}_y \rightarrow N - mg\cos 20 = 0$ ✓

$\sum F_x = m\bar{a}_x \rightarrow mg\sin 20 - F = m\bar{a}_x$ ✓ ?

اصطکاک جنبشی $\rightarrow F = \mu_k N = 0.12\,(0.94 mg) = 0.1128\, mg$

$\sum M_G = \bar{I}\alpha \rightarrow Fr = mr^2\alpha$ ✓ ?

$\rightarrow \begin{cases} \bar{a}_x = \text{—} \\ \alpha = 7.26\ rad/s^2 \end{cases}$

$x = \frac{1}{2}\bar{a}_x t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{\bar{a}_x}} = 1.49\, s$

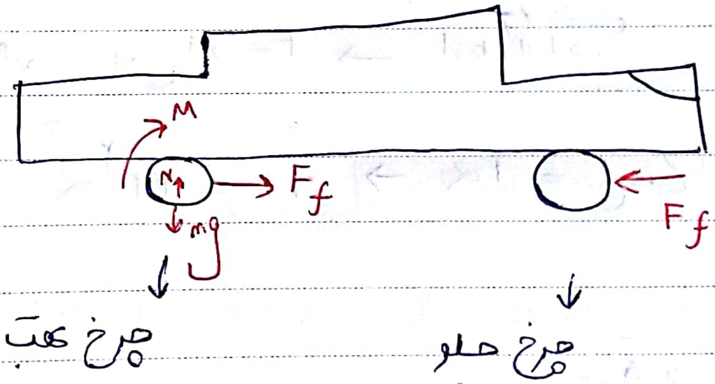
حالا صحبت راجع به جهت F

(رو به پایین سطح شیبدار)

پس اون $mg\sin\alpha$ که حرکت رو به جلویش رو تأمین می‌کنه حالا به علت وجود اصطکاک حتماً باید بغلتد پس اصطکاک به کدوم سمت باشه؟ به سمت بالای سطح شیبدار چون رو به پایین حرکت می‌کنه پس واسه غلتش‌اش باید به نیرو خلاف جهت حرکت واسه‌ش تا بغلتد.

یه مثال دیگه واسه تعیین نیروی اصطکاک:

فرض کن ماشین دیفرانسیل عقب باشه



چرخ عقب چون ماشین دیفرانسیل عقب است ~~نیروی رو به جلویش تأمین است~~.

پس غلتش دارد حالا واسه این که رو به جلو حرکت کنه اصطکاک باید رو به جلو باشه واسه چرخ جلو به علت وصل بودن به محورها و چرخ‌های عقب نیروی رو به جلویش تأمین است حالا واسه غلتش به نیروی اصطکاک رو به عقب باید وارد بشود.

(باز هم پیوسته بشود.)

Subject:
Date

در جلسه جدید راجع به اون ماشینه جلسه قبل بپرس.

PAPCO

Date

ب) کار و انرژی

- کار نیرو - کار کوپل

کار انجام شده توسط نیروی F

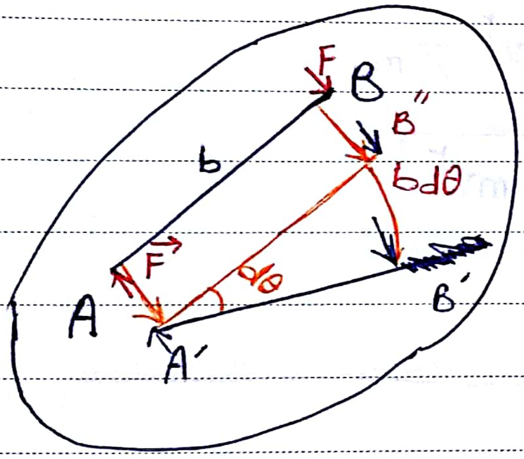
$$U=\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int (F\cos\alpha)\, ds \qquad (I)$$

$d\vec{r}$: بردار جابجایی دیفرانسیلی نقطه اثر $\vec{F}$

α : زاویه بین $\vec{F}$ و امتداد جابجایی $d\vec{r}$

ds : مقدار بردار $d\vec{r}$

کار انجام شده توسط کوپل



خط $AB \to A'B'$

$(AB \to A'B') =$ دوران + انتقال

$AB \to A'B''$ (انتقال) ، $A'B'' \to A'B'$ (دوران)

$dU_{\text{انتقال}} = 0$ ← (زوج نیرو با مقدار جابجایی برابر و خلاف جهت) $\Rightarrow dU_{\text{کوپل}} = Fb\,d\theta \quad (*)$

$dU_{\text{دوران}} = F\times b\,d\theta + 0$ ← فرض کنید نقطه دوران

از طرفی $\Rightarrow M = Fb \xrightarrow{(*)} dU_{\text{کوپل}} = M\,d\theta \qquad (II)$

P4PCO

Subject:
Date

I , II $\quad W_U = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int M\,d\theta$

کار نیرو — کار کوپل

← چرا بردار نیست چون در صفحه نشسته و جهت نداره (فکر کنم)

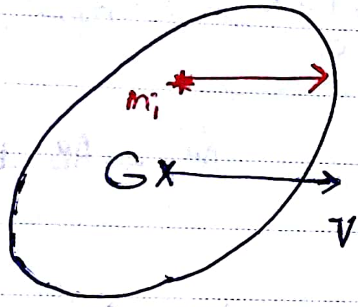
انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$$

انرژی جنبشی مجموعه ذرات

الف) انتقال

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$$



$v_i = v$

$$T = \frac{1}{2} v^2 \sum m_i$$

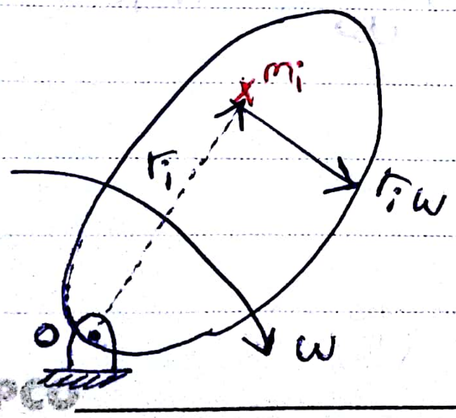
$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v^2}$$

ب) دوران

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i (r_i \omega)^2$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i r_i^2$$

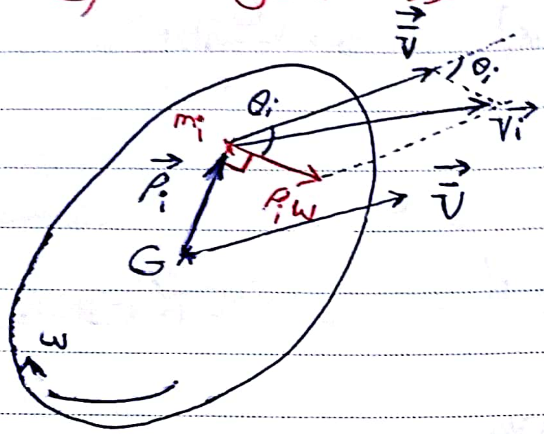


$$\boxed{T = \frac{1}{2} I_O \omega^2}$$

I_O ← ممان اینرسی

Subject:
Date

ج) دوران + انتقال



$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{v}_{i/G} = \vec{\bar{v}} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_i$$

$$v_i^2 = \bar{v}^2 + (\rho_i\omega)^2 + 2\bar{v}(\rho_i\omega)\cos\theta_i$$ → قاعده کسینوس ها

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i\left(\bar{v}^2 + \rho_i^2\omega^2 + 2\bar{v}\omega\rho_i\cos\theta_i\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\bar{v}^2\sum m_i + \frac{1}{2}\omega^2\sum m_i\rho_i^2 + \bar{v}\omega\sum m_i\rho_i\cos\theta_i$$

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 + \bar{v}\omega\sum m_i y_i$$ ($\sum m_i y_i = 0$)

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$$

انرژی جنبشی انتقالی — انرژی جنبشی دورانی

نکته) اگر جسم صلب دارای مرکز آنی دوران (c) باشد، در آن لحظه می توان نوشت

$$T = \frac{1}{2}I_c\omega^2$$

P4PCO

انرژی پتانسیل :

- الاستیک فنر $\quad \Delta V_e = \frac{1}{2}k x_2^2 - \frac{1}{2}k x_1^2$
- گرانش $\quad \Delta V_g = mg\,\Delta h$

معادلات کار و انرژی :

کار نیروها و ممان های خارجی به غیر از وزن و فنر

$$U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g$$

(ΔT: انرژی جنبشی، ΔV_e: الاستیک فنر، ΔV_g: پتانسیل گرانش)

$$U'_{1-2} = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int M\, d\theta$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$$

اگر دوران خالص یا مرکز آنی دوران ← $T = \frac{1}{2} I_C \omega^2$

توان :

میزان انجام کار نسبت به زمان

$$P = \frac{dU'}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} + \frac{M\,d\theta}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} + M\omega$$

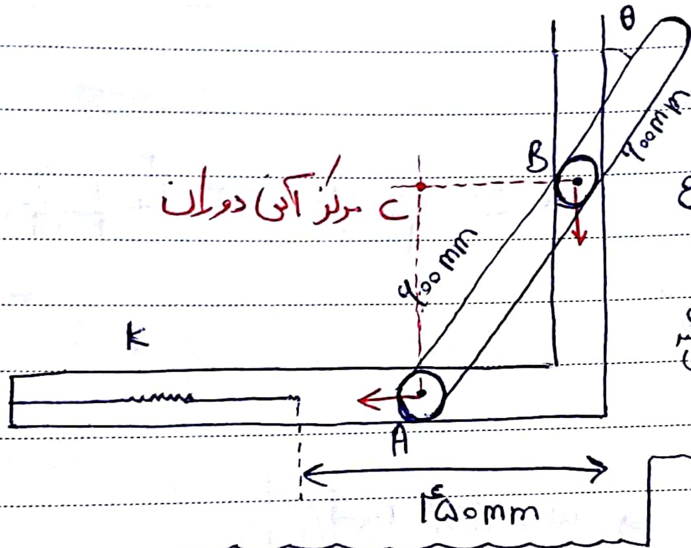
($\vec{v}$: سرعت حرکت نقطه اثر نیرو، ω: سرعت زاویه‌ای جسم)

Subject:
Date

مثال) میله‌ای به جرم ۲۰kg که مرکز آن در B قرار دارد از حالت سکون در $\theta = 0$ رها می‌شود با سقوط میله، فنر توسط نقطه A فشرده می‌شود $K = 5000\ N/m$

الف) سرعت زاویه‌ای میله در $\theta = 30$ ؟

ب) سرعت برخورد B با سطح افقی ؟

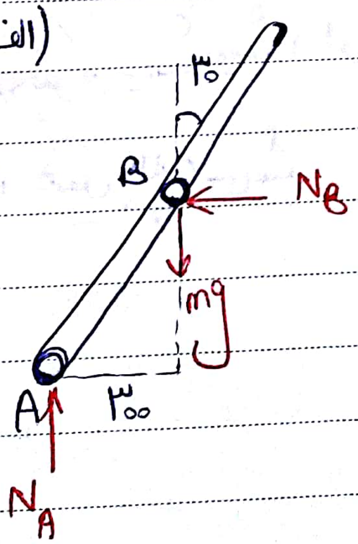


پس این جا می‌دانی با برابا کار وانرژی حل کنی ولی به طور کلی اگر شتاب یا زمان خواسته بود قانون دوم اگر مثلاً تغییر ارتفاع خواسته بود کار وانرژی یا مثلاً اگر گفته بود مثلاً در این قدر زمان، این قدر نیرو ش فنر و موستم.

چون در الف میله اصلا به فنر نمی‌رسد.

$$U_{1-2} = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g$$

حل) الف)



چون N_A و N_B دارای هم عمود بر مسیرند.

$$\Delta V_g = mg(0/6\cos 30 - 0/6) = -15/77 J$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m \bar{V}_B^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$$

؟ ؟

Subject:
Date

الان ما V_B رو بدست بیاوریم الف حل چون از ما ω رو می خواد که با بدست آوردن V_B ، ω هم بدست می آید.

حال باید سینماتیک حل کرد یکی از کارها پیدا کردن مرکز آنی دوران است که گفته بودیم عمود باید رسم کنیم از سرعت‌ها تا به هم برخورد کنند.

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{V}_B = \bar{BC}\,\omega = 0/3\,\omega \\ \bar{I} = \frac{1}{12} m L^2 \\ \Delta T = \frac{1}{2} m \bar{V}_B^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2 \end{array}\right. \rightarrow \Delta T = \frac{1}{2}(20)(0/3\omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\times 20\times 1/2^2\right)\omega^2 = 2/1\omega^2$$

(؟ زیر $\bar{V}_B$ و ω)

$$\rightarrow \Delta T + \Delta V_g = 0 \Rightarrow \omega = 2/74 \ rad/s$$

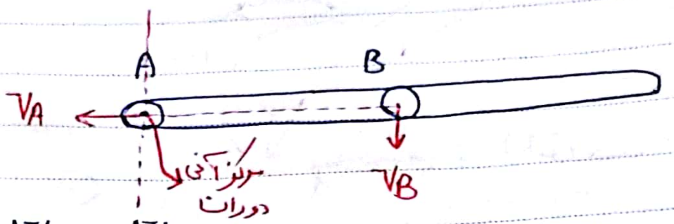
یه چیز دیگه که می شد نوشت این بود که $T = \frac{1}{2} I_C \omega^2$ و ———

$$I_C = \bar{I} + m(BC)^2$$

مثل همین بالایی می شد.

Subject:
Date

(راه حل)
ب) وضعیت افقی



$U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g$

$\Delta V_g = mg(0 - 0{,}4) = -117{,}7 \text{ J}$

$\Delta V_e = \frac{1}{2}k(0{,}4 - 0{,}15)^2 - 0 = 56{,}3 \text{ J}$

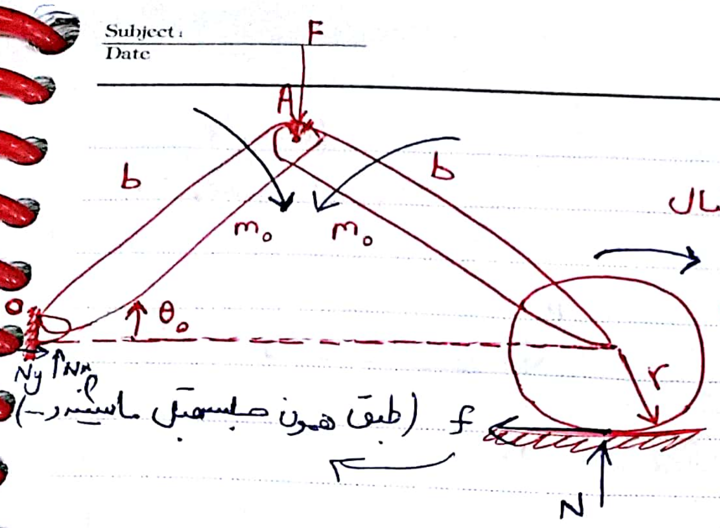
$\Delta T = \frac{1}{2}m\bar{V}_B^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \frac{1}{2}m\bar{V}_B^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\left(\frac{\bar{V}_B}{0{,}4}\right)^2$

$\bar{V}_B = \bar{AB}\omega = 0{,}4\omega \rightarrow \omega = \frac{\bar{V}_B}{0{,}4}$

$\bar{V}_B = \checkmark$

qPCO

Subject:
Date



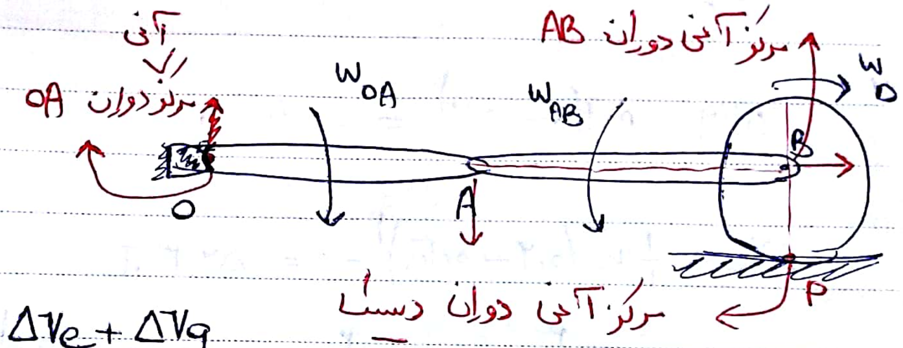
مثال) نیروی F همواره عمودی وارد بر نقطه اتصال

۲ لینک وارد می‌شود

- دیسک دارای غلتش محض

- @ $\theta=0 \rightarrow \omega=?$

در لحظه $\theta=0$



$$U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g$$

$$U'_{1-2} = Fb\sin\theta_0 + 0$$

چرا؟ بررسی کرده به جلسه قبل تقسیم واسه اصطکاک استاتیکی

غلتش فرض کنیم محض نیروی اصطکاک

استاتیکی است و پس جابجایی ندارد.

$$\Delta V_g = \Delta V_g)_{OA} + \Delta V_g)_{AB} + \Delta V_g)_{O} = -m_0 g \frac{b}{2}\sin\theta_0 - m_0 g \frac{b}{2}\sin\theta_0 + 0$$

PAPCO

Subject:
Date

$$T = \frac{1}{2} I_o \omega_{OA}^2 + \frac{1}{2} I_B \omega_{AB}^2 + \frac{1}{2} I_P \omega_D^2$$

OA میله: $v_A = \overline{OA}\, \omega_{OA} = b\omega$ (*)

AB میله:

$$\begin{cases} v_A = \overline{AB}\, \omega_{AB} = b\,\omega_{AB} = b\omega \Rightarrow \boxed{\omega_{AB} = \omega_{OA} = \omega} \\ v_B = 0 \rightarrow \text{چون مرکز آنی دوران } B \end{cases}$$

دیسک: $v_B = r\omega_D = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_D = 0}$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m b^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m_o b^2\right)\omega^2 + 0$$

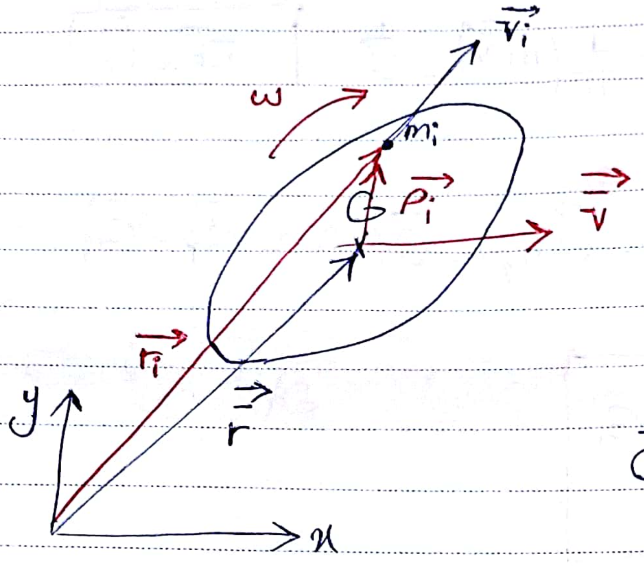
$$\Rightarrow U_{1-2} = \Delta V_g + \Delta T$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3(F + m_o g)\sin\theta}{m_o b}}$$

PAPCO

ج) ضربه و مومنتم

الف) مومنتم خطی



$$\vec{G}=\sum m_i\vec{v}_i \qquad \vec{v}_i=\dot{\vec{r}}_i$$

$$\vec{G}=\sum m_i\dot{\vec{r}}_i=\frac{d}{dt}\left(\sum m_i\vec{r}_i\right)$$

با فرض ثابت بودن جرم سیستم

یادآوری $\rightarrow \sum m_i\vec{r}_i=m\bar{\vec{r}}$

$$\Rightarrow \vec{G}=\frac{d}{dt}\left(m\bar{\vec{r}}\right)=m\frac{d\bar{\vec{r}}}{dt}=m\bar{\vec{v}} \qquad \boxed{\vec{G}=m\bar{\vec{v}}}$$

نکته: دوران جسم تأثیری در مومنتم خطی ندارد.

$$\vec{v}_i=\bar{\vec{v}}+\vec{\omega}\times\vec{\rho}_i \qquad \vec{G}=\sum m_i\vec{v}_i=\sum m_i\left(\bar{\vec{v}}+\vec{\omega}\times\vec{\rho}_i\right)=$$

$$\sum\left(m_i\bar{\vec{v}}\right)+\sum m_i\left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_i\right)=m\bar{\vec{v}}+\vec{\omega}\times\underbrace{\sum\left(m_i\vec{\rho}_i\right)}_{0}=m\bar{\vec{v}}$$

Subject
Date

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \dot{\vec{G}}$$

$$\boxed{\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}}}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = \int_1^2 \dot{\vec{G}}\, dt = \vec{G}(t_2) - \vec{G}(t_1) = \vec{G}_2 - \vec{G}_1$$

$$\rightarrow \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = \vec{G}_2 - \vec{G}_1}$$

فرم اسکالر 8

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum F_x\, dt = G_{x_2} - G_{x_1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum F_y\, dt = G_{y_2} - G_{y_1}$$

PAPCO

ب) مومنتم زاویه‌ای

مومنتم زاویه‌ای حول نقطه G

بردار $\vec{\omega}$ در امتداد k است.

$\vec{\omega} = \omega \vec{k}$

$$\vec{H}_G = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{v}_{i/G} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

$$\vec{H}_G = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \left(\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i \right) = \sum \left(\vec{\rho}_i \times m_i \vec{v} \right) + \sum \left(m_i \vec{\rho}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i \right) \right)$$

$$= \underbrace{\sum \left(m_i \vec{\rho}_i \right)}_{0} \times \vec{v} + \left(\sum m_i \rho_i^2 \omega \right) \vec{k}$$

چون فرکیف ثابته از Σ خارج می‌شه

ω در ρ_i درصفحه است و عمود بر ρ_i پس cross این ۲ عبارت خارج از صفحه می‌آید.

$$\rightarrow \quad |\vec{H}_G| = H_G = \underbrace{\left(\sum m_i \rho_i^2 \right)}_{\bar{I}} \omega = \bar{I} \omega \qquad \boxed{H_G = \bar{I} \omega}$$

چرا اسکالر نوشتیم؟ چون جهتش همواره در جهت k است.

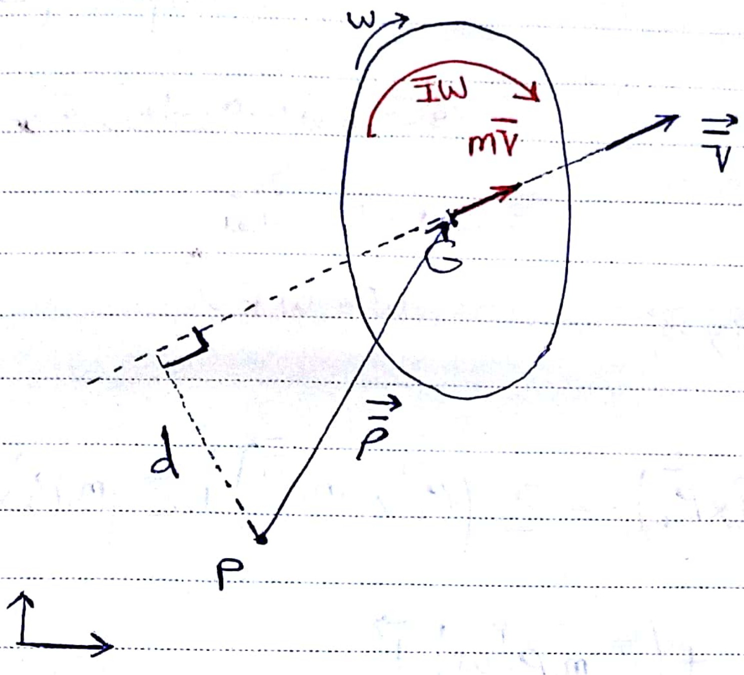
$$\sum M_G = \bar{I} \dot{\omega} \quad \rightarrow \quad \boxed{\sum \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M}_G \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{H}}_G \, dt = \vec{H}_G(t_2) - \vec{H}_G(t_1) = \vec{H}_{G_2} - \vec{H}_{G_1}$$

Subject

Date

مومنتم زاویه ای حول نقطه P :

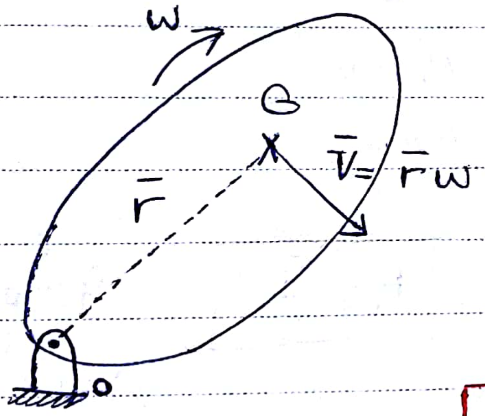


$$\vec{H}_P = \vec{H}_G + \vec{\rho} \times m\vec{\bar{v}}$$

$$H_P = H_G + m\bar{v}d$$

$$\boxed{H_P = \bar{I}\omega + m\bar{v}d}$$

اگر P محور دوران O باشد :



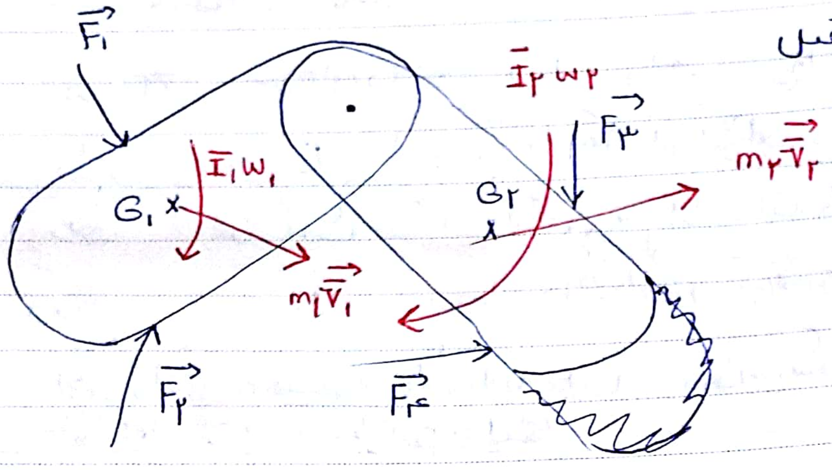
$$H_P = H_O = \bar{I}\omega + m(\bar{r}\omega)\bar{r}$$

$$= (\bar{I} + m\bar{r}^2)\omega$$

$$\boxed{H_O = I_O\,\omega}$$

Subject
Date

ج) اجسام صلب متصل



جسم اول $\quad \sum \vec{F}^{1}_{\text{خارجی}} + \sum \vec{F}^{1}_{\text{اتصال}} = \dot{\vec{G}}_1$

+

جسم دوم $\quad \sum \vec{F}^{2}_{\text{خارجی}} + \sum \vec{F}^{2}_{\text{اتصال}} = \dot{\vec{G}}_2$

$$= \quad \boxed{\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}}_1 + \dot{\vec{G}}_2 + \dots}$$

مجموع نیروهای خارجی

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\,dt = \left[G_1(t_2) - G_1(t_1)\right] + \left[G_2(t_2) - G_2(t_1)\right] + \dots$$

به طریق مشابه: $\quad \boxed{\sum M_O = \dot{\vec{H}}_{O_1} + \dot{\vec{H}}_{O_2} + \dots}$ یا $\boxed{\sum \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_{G_1} + \dot{\vec{H}}_{G_2} + \dots}$

گشتاورهای خارجی حول O — گشتاورهای خارجی حول G

$$\rightarrow \int \sum \vec{M}_O\,dt = \left[H_{O_1}(t_2) - H_{O_1}(t_1)\right] + \left[H_{O_2}(t_2) - H_{O_2}(t_1)\right] + \dots$$

Subject
Date

بین که موضوع مهمی که بچه ها اشتباه می کنند این است که الان در صفحه قبل
در ΣF نیروهای خارجی را حساب می کنیم در ΣM_G ... باید دوباره
گشتاور نیروهای خارجی را حساب کنی. که اگر گشتاور خارجی داشتی باید وارد
این بحث در کار و انرژی هم اتفاق داد که ۲ تا عبارت دارد یکی اش $\int F.dr$ و
دیگری — در اول نیروهای خارجی را دخیل می کنی ولی در عبارت دوم اگر گشتاور
خارجی داشتی که هیچی، نداشتی اون عبارت صرفا می شود. یعنی در کار و انرژی باید
نیروهای خارجی را در عبارت دوم دخیل کنی.

در بقای مومنتوم:

$$\Sigma \vec{F} = \dot{\vec{G}} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F}\, dt = \Delta \vec{G}$$

if $\Sigma \vec{F} = 0$ یا $\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F}\, dt = 0$

$$\Rightarrow \Delta \vec{G} = 0 \Rightarrow \vec{G}_2 = \vec{G}_1$$

$$\Sigma \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{M}_G\, dt = \Delta \vec{H}_G$$

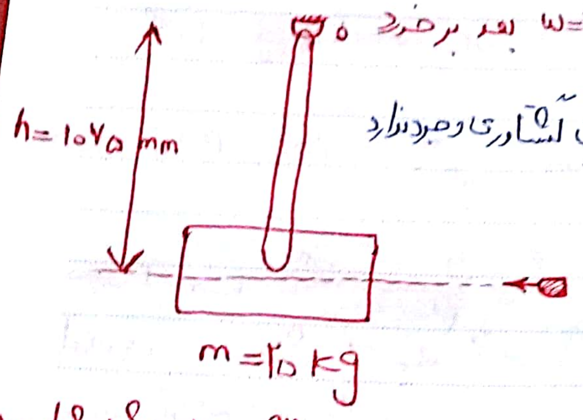
if $\Sigma \vec{M}_G = 0$ یا $\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{M}_G = 0$

$$\Rightarrow \Delta \vec{H}_G = 0 \Rightarrow \vec{H}_{G_1} = \vec{H}_{G_2}$$

PAPCO

Subject
Date

مثال) گلوله به پاندول مرکب برخورد می‌کند. $\omega = ?$ بعد برخورد



حین برخورد هیچ نیروی خارجی وجود ندارد و همچنین گشتاوری وجود ندارد

پس هم پایستگی مومنتم خطی و هم مومنتم زاویه‌ای داریم.

$v_1 = 500\ m/s$

$m_1 = 28\ gr$

حالا چون سوال زاویه‌ای بعد برخورد خواسته پایستگی مومنتم زاویه‌ای می‌نویسیم.

شعاع ژیراسیون $k_o = 925\ mm$

اصل) $\sum \vec{M_o} = 0 \rightarrow \vec{H}_{o1} = \vec{H}_{o2}$
خارجی

گشتاور مومنتم خطی گلوله حول o

یادآوری → $I_g = mr_g^2$ هر نقطه‌ای

$H_{o1} = 0 \big|_{\text{پاندول}} + \left(m_1 v_1 h\right)\big|_{\text{گلوله}}$

فرض کنیم چون قبل حرکت گشتاور، حرکتی ندارد، صفر می‌شد

$I = \int r^2 dm$

$H_{o2} = I_o \omega = \left(m k_o^2 + m_1 h^2\right)\omega$
چرخش.

اگر جسم نقطه‌ای باشد → $r^2 \int dm = mr^2$

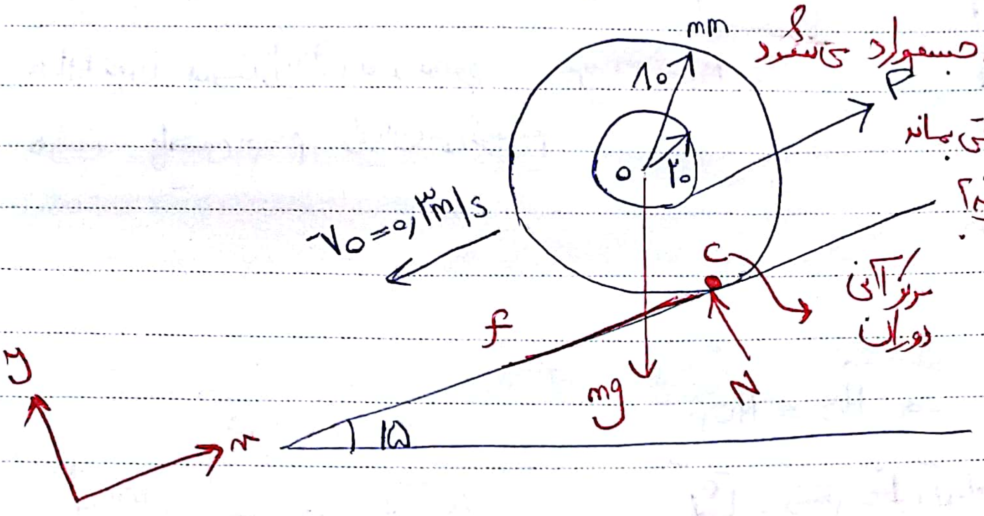
$\rightarrow m_1 v_1 h = \left(m k_o^2 + m_1 h^2\right)\omega \rightarrow \omega = \checkmark$

P4PCO

Date

مثال) چرخی با سرعت $0/3 m/s$ از سطح شیب‌دار بیرون لغزش می‌غلتد.

$m = 1kg$ $K_G = 60mm$ $\bar{V}_0 = 0/3 m/s$ (اولیه) $P = 10N$ $t = 0.5s$



نیروی P به مدت ۵ ثانیه بر جسم وارد می‌شود
با فرض این که غلتش باقی بماند
سرعت مرکز چرخ بعد ۵ ثانیه؟

خوب الان دستگاه رو می‌گیریم.

وقتی بحث نیرو و زمان می‌شه یعنی باید از روابط انتگرالی مومنتم استفاده کنیم.

پس فرض کنیم لحظه P بیاید اصطکاک بر کدام سمت؟ بالا چون نیروی بالاتر بغلتونش. چه نیروی جلو می‌بره؟ $mg\sin\theta$

دقت: در غلتش اصطکاک استاتیکی است ولی ما مقدارش رو نمی‌دونیم ها.

$$\int \Sigma F_x \, dt = G_{x_2} - G_{x_1} \rightarrow \int (P + f - mg\sin\theta) dt = m\bar{V}_2 - m\bar{V}_1$$

$$\int \Sigma M_G \, dt = H_{G_2} - H_{G_1} \rightarrow \int (f \times 0/08 + P \times 0/02) dt = \bar{I}_G \omega_2 - \bar{I}_G \omega_1$$

PAPCO

Subject
Date

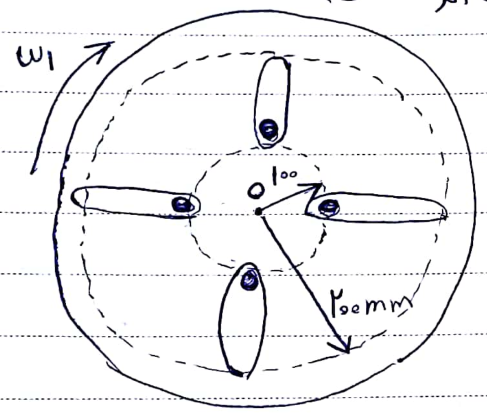
ادامه) بین الان ۲ رابطه کم داریم حل با حضوری توسم که روابط نیرویی رو هم رو نوشتیم حال باید روابط سینماتیکی بنویسیم مرکز آنی دوران

۴ معادله ۴ مجهول ω بدست می آید.

$v_1 = 0.08\,\omega_1$

$v_2 = 0.08\,\omega_2$

سوال) ۴ ساچمه در شعاع داخلی نگه داشته شده اند (افقی) ناگهان رها می‌شوند ← انتهای شیار



$\omega_1 = 120\,rpm \quad m_D = 6\,kg$

$m_{ساچمه} = 0.5\,kg \quad k_{O_D} = 175\,mm$

- سرعت زاویه‌ای جدید؟

حل) $\sum \vec{M}_O = 0 \rightarrow H_{O_2} = H_{O_1} \rightarrow I_{O_2}\omega_2 = I_{O_1}\omega_1$

$$\omega_2 = \frac{I_{O_1}}{I_{O_2}}\,\omega_1$$

$I_{O_1} = m_D k_{O_D}^2 + 4 m_{ساچمه} \times (0.1)^2$

$I_{O_2} = m_D k_{O_D}^2 + 4 m_{ساچمه} \times (0.2)^2$

ω کمتر می‌شد چون توزیع فاصله‌اش موستم کم می‌شد.

PAPCO